UNIVERSIDADE DE LISBOA

FACULDADE DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

NÚMEROS REAIS: HISTÓRIA E DIDÁTICA

Luísa Isabel Lourenço de Sousa

DISSERTAÇÃO

MESTRADO EM MATEMÁTICA PARA PROFESSORES

Janeiro 2013

UNIVERSIDADE DE LISBOA

FACULDADE DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

NÚMEROS REAIS: HISTÓRIA E DIDÁTICA

Luísa Isabel Lourenço de Sousa

DISSERTAÇÃO

MESTRADO EM MATEMÁTICA PARA PROFESSORES

Dissertação Orientada pela Professora Doutora

Isabel Maria Ferreira Martins Serra

Janeiro 2013

RESUMO

Nesta dissertação procurou-se apresentar uma abordagem histórica dos números reais, dando relevo a determinados períodos da história e a alguns matemáticos particularmente interessantes para o ensino elementar da matéria. Esse objetivo inicial conduziu ao estudo da definição dos números irracionais e da continuidade na formulação de Richard Dedekind.

Segue-se uma exploração histórica do número π, porque este número é, naturalmente, o irracional cuja utilização mais problemas levanta no ensino. Com base nos exemplos históricos tentou-se, sempre que possível, encontrar aplicações ao ensino da disciplina de matemática no Ensino Básico. Nesse sentido, são dados alguns exemplos, sugestões e também reflexões didáticas de conteúdos históricos que poderão ser aplicados no ensino.

A reflexão originada pela interação entre história e ensino da matemática levou ainda à elaboração de um projeto, que foi concretizado através da realização de uma experiência com duas turmas do 5º ano do Ensino Básico. Seguem-se as reflexões decorrentes do desenvolvimento e dos resultados obtidos com essa experiência.

Palavras-Chave: Irracionalidade; História; Ensino; Pi; Aproximação.

ABSTRACT

In this dissertation we aim to provide a historical approach to the teaching of real numbers in elementary school, emphasizing certain periods of history and specific mathematicians that are particularly interesting for teaching in this setting. With this goal in mind we study the definition of irrational numbers and continuity in the formulation of Richard Dedekind.

This is followed by a historical exploration of the number π, since this number is, naturally, the irrational which use raises more problems in elementary school. Based on historical examples we tried, whenever possible, to provide applications to the teaching of elementary mathematics. Therefore we give some examples and suggestions as well as reflections of historical content that can be applied in the teaching of mathematics.

These examples and reflections led to the elaboration of a project, together with an experiment with two groups of 5th year (9-11 years old) students. Then we present some reflections arising from the results of this experience.

Key Words: Irrationality; History; Teaching; Pi; Aproximation.

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora, Professora Doutora Isabel Serra, pelo constante apoio e disponibilidade.

Aos meus pais, Álvaro e Manuela, pelo exemplo fundamental para a minha formação pessoal e pelo esforço encetado para me proporcionarem a prossecução da formação académica.

À minha irmã Rosa e cunhado João, por terem desbravado o caminho, facilitando a minha futura passagem.

Ao meu sobrinho e afilhado Sérgio, “apenas” por existir e ser a personificação do meu amor.

Ao meu futuro esposo e pai dos meus filhos, por a certa altura ter sido talvez o único a acreditar que eu ia conseguir, por me ter “obrigado” a seguir sempre em frente, e por ir à biblioteca num dia de inverno.

Aos meus familiares e verdadeiros amigos (poucos mas bons); aqueles que me acompanharam e demonstraram a sua amizade. Especialmente ao meu amigo Pedro, pelo apoio e preocupação constantes e pelas horas que disponibilizou para me ajudar no esclarecimento de dúvidas, e à minha amiga Carla, pela ajuda e partilha de experiências.

Aos meus iniciais colegas de mestrado, Ana Eliete, Alexandre e João, pelo exemplo que me proporcionaram e pela colaboração em alguns momentos.

À Professora Doutora Carlota Gonçalves, pelo apoio na procura de boas soluções de percurso.

Aos professores da disciplina de Matemática que tive ao longo do meu percurso de estudante. Mesmo àqueles que, a certa altura da sua carreira, se devem ter esquecido do propósito da profissão.

Agradeço-vos a todos, pois a vossa existência na minha vida contribuiu para a sensação de realização que sinto no fecho deste ciclo.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

O interesse em proporcionar aos alunos as melhores e as mais adequadas experiências de aprendizagem vem motivando, desde há muito, a reflexão e o empenhamento dos professores. Uma das vertentes dessa reflexão é o papel que pode desempenhar a História da Matemática.

A utilização da História da Matemática na didática é reconhecida como um recurso de largas potencialidades, em qualquer nível de ensino. Por ser o 2º Ciclo do Ensino Básico aquele no qual me encontro atualmente a desenvolver a minha prática docente, os conteúdos matemáticos trabalhados no Ensino Básico, e o nível etário dos seus alunos foram condições essenciais para definir o percurso desta dissertação. Tendo em vista os dois interesses em questão, a História da Matemática e as suas aplicações ao Ensino Básico, dividiu-se o trabalho em duas partes (Parte I – *Desenvolvimento Histórico-matemático* e Parte II – *Aplicação ao Ensino: Desafios Sugeridos pela História*).

Na Parte I pretendeu-se apresentar uma abordagem histórica dos números reais, dando relevo a determinados períodos da história e a alguns matemáticos particularmente interessantes para o ensino elementar da matéria. Esse objetivo inicial conduziu ao estudo da definição dos números irracionais e da continuidade, na formulação de Richard Dedekind, (ponto I.1.). Optou-se por iniciar o trabalho com este estudo pois a definição de Dedekind foi um momento importante na história dos números, e decisivo para o tema histórico em causa na dissertação, o conceito de irracionalidade. Segue-se, no ponto I. 2., uma exploração histórica do número π, porque este número é, naturalmente, o irracional cuja utilização mais problemas levanta no ensino.

Com base nos exemplos históricos tentou-se, sempre que possível, encontrar aplicações ao ensino da disciplina de matemática no Ensino Básico. Nesse sentido, são dadas na Parte II (ponto II.1.) alguns exemplos, sugestões e também reflexões didáticas de conteúdos históricos que poderão ser aplicados no ensino. No ponto II.2. o tema tratado na dissertação é contextualizado relativamente às indicações metodológicas constantes no Programa de Matemática do Ensino Básico.

A reflexão originada pela interação entre história e ensino da matemática levou ainda à elaboração de um projeto, apresentado, no ponto II.3., e que foi concretizado através da realização de uma experiência com duas turmas do 5º ano do Ensino Básico. Seguem-se, no ponto II.3.1 as reflexões decorrentes do desenvolvimento e dos resultados obtidos com essa experiência.

Deve-se ressalvar que, para facilidade de comunicação, a notação utilizada neste trabalho é a utilizada na atualidade, tendo como base os elementos que constam do Programa de Matemática, Metas Curriculares do Ensino Básico e fontes afins orientadoras de metodologias/conteúdos matemáticos.

Parte I

Desenvolvimento Histórico-matemático

Os números governam o mundo.
Platão

1) O Início: a Solução de Dedekind

1.1 Descrição da Presença de “Lacunas” numa Reta

O rumo dos fundamentos da matemática no século XX foi definido em novembro de 1858, quando Richard Dedekind (1831-1916) teve de ensinar os elementos do cálculo diferencial e sentiu, mais profundamente do que nunca, a falta de uma base realmente científica para a análise. Para discutir a aproximação de uma grandeza variável para um valor de limite fixo, teve de recorrer a evidências geométricas. Ao observar que um ponto divide uma reta em duas partes, foi conduzido para o que considerou como sendo a essência da continuidade (Taylor, 1999).

Na época dos Pitagóricos, a geometria era baseada na teoria das proporções, uma teoria numérica aplicada apenas aos comensuráveis isto é, aos racionais. A ideia de que existem quantidades que não se podem exprimir por números surge na matemática grega no contexto de alguns problemas geométricos que podem parecer elementares, como é o caso da diagonal de um quadrado ou do perímetro de uma circunferência. Aliás, os Gregos não usavam a palavra número para designar essas quantidades. “Número” na Grécia era inteiro ou racional. Os irracionais, ou incomensuráveis, eram grandezas e não números. Os matemáticos Gregos designavam esta razão entre grandezas incomensuráveis de *alogos*, inexprimíveis ou incalculáveis.

A partir dos textos originais é possível deduzir que os matemáticos gregos trabalham com a medida de comprimentos, áreas, volumes, ângulos, arcos de círculo, mas sem que se associe a essa medida um conceito numérico, pois apenas os valores inteiros ou racionais são considerados como números. O termo «medir» é empregue no sentido seguinte: um tamanho (de comprimento, área, volume ou ângulo) é capaz de medir outro semelhante, se este último é obtido por justaposição, de um número inteiro ou racional de vezes o primeiro.

Alguns diálogos de Platão revelam a perturbação gerada com a descoberta da existência de comprimentos (ou áreas e volumes), chamados incomensuráveis, que não se podiam exprimir através de números inteiros ou racionais. Essa descoberta destruiu a generalidade da teoria das proporções, de cariz absolutamente geométrico, que permitia comparar qualquer comprimento com a unidade. Até então, todas as demonstrações eram baseadas no número como coleção de unidades. A incomensurabilidade teve também como consequência que o segmento deixava de ser considerado indivisível, mas sim infinitamente divisível, ideia que deu origem, em particular, aos chamados paradoxos de Zenão. Estes paradoxos exprimem o problema essencial da articulação entre geometria e números, o problema da oposição entre continuidade das grandezas geométricas e a descontinuidade das grandezas numéricas.

Após a descoberta dos incomensuráveis os pitagóricos deixaram de poder manipular grandezas geométricas como proporções de números inteiros (Calinger, 1999, p.75). A necessidade de dar um estatuto rigoroso às relações entre grandezas passou a ser um problema fundamental das matemáticas gregas.

Eudóxio de Cnido (408-355 a.C.), discípulo de Platão, parece ter sido o primeiro a resolver completamente o problema das grandezas incomensuráveis construindo uma teoria das proporções que se aplicava tanto a grandezas comensuráveis quanto a grandezas incomensuráveis.

Esta teoria, logicamente equivalente à teoria dos cortes de Dedekind, está desenvolvida no livro V dos *Elementos* de Euclides (~325 a.C.-~265 a.C.). Durante mais de dois mil anos, a definição de Eudóxio foi a única base para lidar com os números irracionais, até Dedekind se debruçar sobre o assunto, no séc. XIX. “Com esta definição, Dedekind criou os números reais, eliminou os “buracos” de $\mathbb{Q}$ e estabeleceu uma correspondência biunívoca entre os pontos de uma reta e os números reais” (Bongiovanni, 2005).

Note-se que um número racional pode ser expresso na forma de uma fração a/b, onde a e b são inteiros.

Um número que não possa ser expresso como uma fração racional é um número irracional. Por exemplo, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, e, π. A classe dos números reais é formada a partir de números racionais como $1=(1/1)$, $2=(2/1)$, $3=(3/1)$, 1/4, 15/73, e de números irracionais como acima referido.

Um número racional pode ser expresso em notação decimal onde o decimal não termina (i.e. termina em zeros), é recorrente, repete-se periodicamente, por exemplo 10/13 = 0,769230.769230.769230.

Um número irracional, quando expresso como decimal, nem termina nem apresenta periodicidade. É impossível expressar exatamente números como $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$ como decimais; o que se pode é aproximar os seus valores quanto desejado, mas o decimal não pode nunca expressar uma raiz, nem exatamente nem periodicamente.

É difícil executar operações aritméticas com grandezas que não podem ser expressas com exatidão (Newman, 1988). Essa dificuldade persiste até aos dias de hoje.

Julius Wilhelm Richard Dedekind foi um dos maiores matemáticos do séc. XIX, quer pelas suas contribuições para os fundamentos quer pelas suas contribuições para a Teoria dos Números e a Álgebra. Quanto à Teoria dos Números é particularmente relevante o ensaio *Continuidade e Números Irracionais* de 1872.

Dedekind nasceu em Brunsvique em 1831, onde fez os estudos até à universidade, donde, passados dois anos, se transferiu para a Universidade de Göttingen, na qual concluiu os estudos. Foi aluno de Carl Gauss (1777-1855), e o último doutorando deste grande matemático. Em Göttingen contactou com Bernhard Riemann (1826-1866), e também frequentou cursos de teoria dos números com Lejeune Dirichlet (1805-1859), outro reputado matemático em Göttingen. Anos mais tarde, haveria de fazer importante trabalho editorial para Gauss, Dirichlet e Riemann. Em 1858 mudou-se para o Instituto Politécnico em Zurique, para assumir o cargo de professor de cálculo, e aí começou a redigir *Continuidade e Números Irracionais*, um dos trabalhos mais importantes de sempre sobre os fundamentos da análise. Regressou a Brunsvique em 1862, onde ensinou na universidade local até à aposentação em 1896, tendo os seus principais trabalhos matemáticos sido

Fig.1 - Em 1872 , o matemático alemão Richard Dedekind publicou uma obra intitulada *Continuidade e Números Irracionais*, dedicado ao estudo do problema:*Todo o ponto da reta produz nela um corte.*

publicados durante a estadia nesta cidade. Durante este período teve também muitos contactos pessoais e troca de correspondência com outros grandes matemáticos como Georg Cantor (1845-1918), Heinrich Weber (1842-1913) e Leopold Kronecker (1823-1891) (Oliveira, 2012).

A definição de Dedekind dos números irracionais (como cortes ou pares de secções contíguas de números racionais) foi adotada por muitos matemáticos da época como, por exemplo, Dini (1845-1918) em 1878, Pasch (1843-1930) em 1882, Jordan (1838-1922) em 1893, e mais tarde, em 1930, pelo influente E. Landau (1877-1938), W. Rudin (1921-2010) em 1953 e muitos outros até aos nossos dias, como S. Feferman (n.1928) em 1989 e A.M. Gleason (1921-2008) em 1991. Entre nós foi adotada, por exemplo, por J. Vicente Gonçalves (1896-1985) no seu *Curso de Álgebra Superior* (1933) e por Bento de Jesus Caraça (1901-1948) nas *Lições de Álgebra e Análise* (1935) (Oliveira, 2009).

Outros matemáticos além de Dedekind tentaram, aproximadamente ao mesmo tempo, desenvolver uma teoria dos números reais, utilizando uma variedade de abordagens; estes esforços preencheram uma lacuna que fora deixada por Bolzano (1781-1848) num artigo, atualmente famoso, sobre o teorema dos valores intermédios, (publicado em 1817) — um resultado que ainda não era, na sua generalidade, conhecido dos matemáticos da época. Um desses matemáticos foi William Hamilton (1788-1856), que na sua *Teoria das funções conjugadas* (1837), inspirado pela teoria das proporções de Eudóxio, tinha já percorrido uma distância considerável na direção da conceção de Dedekind, definindo os números irracionais como partições dos racionais em duas classes. Mas, ao contrário de Dedekind, ele não prosseguiu na investigação das propriedades das partições ou na prova dos teoremas básicos sobre os números reais. A sua definição de número irracional deve muito ao Livro V dos Elementos de Euclides (Dedekind, 1888, prefácio à 1ª edição). Também Weierstrass (1815-1897) desenvolveu uma teoria aritmética dos números reais, que a partir de 1859 apresentou nas suas lições em Berlim, mas cujos resultados só foram publicados em 1872 num livro de Ernst Kossak (1839-1902), seu aluno. As teorias de Eduard Heine (1821-1881) e do aluno de Weierstrass, Georg Cantor (ambas publicadas em 1872), despertaram a atenção de Dedekind pouco antes da publicação do seu próprio artigo (Oliveira, 2009). Dedekind refere, no prefácio à primeira edição de

O que São e para que Servem os Números (1887), o seguinte: “A mesma teoria de números irracionais fundada no fenómeno dos cortes é estabelecida em 1886 na *Introduction à la théorie des fonctions d’une variable* por J. Tannery (Paris, 1886). Se bem compreendo uma passagem no prefácio deste trabalho, o autor pensou a sua teoria independentemente, isto é, numa altura em que não apenas o meu artigo mas também o *Fondamenti* de Dini mencionado no mesmo prefácio lhe eram desconhecidos”.

No seu pequeno livro *Continuidade e Números Irracionais*, Dedekind (1872, prefácio do autor) tentava remover todas as ambiguidades e dúvidas sobre como os números irracionais encaixavam no domínio da aritmética e que lugar tinham eles numa rigorosa e lógica formulação sobre continuidade matemática. Apresenta-se em seguida um excerto desse trabalho, cuja tradução foi elaborada e adaptada ao propósito desta dissertação.

1.2 Demonstração de Dedekind

A analogia entre números racionais e os pontos de uma linha reta torna-se uma verdadeira correspondência quando escolhemos na reta l uma origem bem determinada, ou ponto zero O, e uma determinada unidade de medida para medir os segmentos.

Recorrendo a esta última, para cada número racional a pode ser construído o comprimento correspondente; e se colocarmos esse comprimento na reta à direita ou à esquerda de O, consoante a seja positivo ou negativo, obtemos, na extremidade do segmento de reta, um ponto P, que pode ser tomado como sendo o ponto que corresponde ao número a; o ponto O corresponde ao número racional zero. E assim, para cada número racional a, no domínio Q dos números racionais, corresponde na reta um e um só ponto P, isto é, um elemento em l. Aos números a, b correspondem respetivamente os dois pontos P, Q, e se $a > b$, então P situa-se à direita de Q.

Continuidade da Linha Reta

É importante dizer que, na linha reta l, há infinitos pontos que não correspondem a nenhum número racional. Se o ponto P corresponde ao número racional a, então, o comprimento $\overline{OP}$ é comensurável com a unidade de medida usada na construção, isto é, existe um terceiro comprimento, chamado medida comum, do qual estes dois comprimentos são múltiplos inteiros. Mas os Gregos, na Antiguidade, já sabiam e haviam demonstrado que há comprimentos incomensuráveis com a unidade de medida, como por exemplo, a diagonal do quadrado cujo lado é a unidade de medida. Se marcarmos tal comprimento a partir do ponto O sobre a reta, obtemos um segmento cuja extremidade não corresponde a nenhum número racional. Uma vez que, além disso, pode facilmente mostrar-se que há infinitos comprimentos que são incomensuráveis com a unidade de medida, podemos afirmar: a linha reta l é infinitamente mais rica em pontos individuais, do que o domínio Q dos números racionais em números individuais.

Se tentarmos agora, como é pretendido, representar cada ponto da linha reta por um número, os números racionais são insuficientes e torna-se absolutamente necessário que o instrumento Q, construído pela criação dos números racionais seja essencialmente melhorado com a criação de novos números de forma que o domínio dos números adquira a mesma completude, ou dizendo de outra forma, a mesma *continuidade* que a linha reta.

As considerações anteriores são tão familiares e conhecidas que muitos poderão considerar a sua repetição como supérflua. Ainda assim, considera-se esta recapitulação como necessária para abordar adequadamente a questão principal. A forma como os números irracionais são habitualmente introduzidos baseia-se diretamente na conceção de quantidades que correspondem a uma dada extensão – que ainda não foram definidas cuidadosamente – e explica o número como o resultado de medir tal quantidade em comparação com outra da mesma natureza[1]. Aqui, em vez disso, pretende-se que a aritmética passe a ser desenvolvida a partir de si mesma, ou seja, numericamente.

Pode-se aceitar que de uma forma geral tais comparações com noções não aritméticas forneceram a oportunidade imediata para a extensão do conceito de número (porém, não é certamente o caso na introdução dos números complexos); mas isto não é certamente razão para introduzir estas noções alheias na própria

[1] A aparente vantagem da generalidade desta definição de número desaparece assim que se consideram os números complexos. Por outro lado, a noção de razão entre dois números da mesma natureza pode ser claramente desenvolvida apenas depois da introdução dos números irracionais (Dedekind).

aritmética, a ciência dos números. Da mesma forma que os números racionais negativos e fracionários são formados por uma criação livre, e tal como as propriedades de operar com estes números podem e devem ser reduzidas às propriedades de operar com inteiros positivos, devemos esforçar-nos por dar uma definição completa dos números irracionais utilizando unicamente os números irracionais. Resta tentar saber como fazê-lo.

> **A comparação acima do conjunto Q dos números racionais com uma linha reta levou ao reconhecimento da existência de lacunas, de uma certa incompletude ou descontinuidade; mas à linha reta atribuímos ausência de lacunas, completude, ou continuidade. Então, em que consiste essa continuidade? Tudo deve depender da resposta a esta pergunta, e só através dela obtemos uma base científica para a investigação de *todos* os domínios contínuos[2].**

O essencial deste problema é, segundo Dedekind, indicar uma característica precisa de continuidade que possa servir de base para deduções válidas.

Durante muito tempo Dedekind ponderou sobre isto em vão, mas finalmente encontrou o que procurava. Na secção anterior chamou-se a atenção para o facto de que qualquer ponto P da linha reta produz uma separação da mesma em duas porções tais que qualquer ponto de uma porção está à esquerda de qualquer ponto da outra. Dedekind encontrou a essência da continuidade na propriedade recíproca, isto é, no princípio seguinte:

> **"Se todos os pontos da reta estão situados em duas classes de tal forma que todo o ponto da primeira classe está à esquerda de todo o ponto da segunda, então, existe um e um só ponto que produz esta decomposição de todos os pontos em duas classes, dividindo a reta em duas partes".**

Como já foi referido anteriormente, presume-se que não há dúvidas em considerar a afirmação anterior como verdadeira. A revelação do segredo da continuidade surge a partir de uma observação banal. Todos considerarão o princípio anterior óbvio e em harmonia com a ideia de linha reta; como tal, Dedekind assume ser totalmente incapaz de apresentar argumentos para provar

[2] Esta frase traduz o aspeto fundamental do procedimento de Dedekind.

que está correta, e afirma que ninguém o poderá fazer. A assunção desta propriedade da reta não é mais do que um axioma pelo qual atribuímos continuidade à reta.

Se o espaço tem alguma existência real, não é de todo necessário que seja contínuo; muitas das suas propriedades manter-se-iam mesmo que fosse descontínuo. E se soubéssemos com certeza que o espaço era descontínuo, não haveria nada que nos impedisse, no caso de o desejarmos, de preencher as lacunas em pensamento, e assim torná-lo contínuo; este preenchimento consistiria na criação de novos pontos individuais e teria de ser feito de acordo com o princípio anterior.

Dedekind encontrou uma propriedade simples, definindo os números irracionais nos limites de racionais - o “corte” de Dedekind – formulando o designado axioma ou postulado da continuidade de Dedekind. Um número irracional é um corte, separando todos os números racionais em duas classes, uma superior e outra inferior; todos os números da classe inferior são menores que os números da classe superior.

Criação dos Números Irracionais

A partir das últimas notas é suficientemente claro como o domínio descontínuo R dos números racionais deve ser completado de maneira a formar um domínio contínuo.

Foi dito que qualquer número racional a produz uma separação do domínio Q em duas classes tais que cada número a_1 da primeira classe A_1 é menor que cada número a_2 da segunda classe A_2; o número a é o maior número da classe A_1, ou o menor da classe A_2. Com a separação do sistema Q em duas classes A_1, A_2 parte-se do princípio que possui apenas *esta* propriedade característica:

qualquer número a_1 em A_1 é menor que qualquer número a_2 em A_2. Para simplificar, chamaremos a uma tal separação um “corte” e designá-la-emos por (A_1, A_2). Podemos então dizer que cada número racional a produz um corte ou, estritamente falando, dois cortes, que, porém, não devemos considerar como essencialmente diferentes. Este corte tem além disso a propriedade de que ou existe um número maior entre os números da primeira classe, ou existe um número menor entre os números da segunda classe. E, reciprocamente, se um corte possui esta propriedade, então é produzido por este maior ou por este menor número racional.

Mas é fácil mostrar que existem infinitos cortes que não são produzidos por números racionais. O seguinte exemplo mostra-o:

Seja D um inteiro positivo, que não seja o quadrado de um inteiro, então existe um inteiro positivo λ tal que,

$$\lambda^2 < D < (\lambda+1)^2 .$$

Se atribuirmos à segunda classe A_2 todos os números racionais positivos a_2 cujo quadrado seja $> D$, e à primeira classe A_1 todos os números racionais a_1, esta separação forma um corte (A_1, A_2), isto é, qualquer número a_1 é menor do que qualquer número a_2. Pois se $a_1 = 0$ ou é negativo, então a_1 é menor que do que qualquer número a_2, porque, por definição, este último (a_2) é positivo; se a_1 é positivo então o seu quadrado é $\leq D$, e consequentemente a_1 é menor do que qualquer número positivo a_2 cujo quadrado é $> D$.

Mas este corte não é produzido por nenhum número racional. Para o demonstrar, deve-se primeiro mostrar que não existe nenhum número racional cujo quadrado $= D$.

Embora isto seja conhecido dos primeiros elementos da teoria dos números, a demonstração indireta que se segue pode, apesar de tudo, tornar-se necessária: Se existe um número racional cujo quadrado $= D$, então existem dois inteiros positivos, t e u, que satisfazem a equação

$$t^2 - Du^2 = 0 ,$$

e podemos considerar que u é o *menor* inteiro positivo que possui a propriedade de que o seu quadrado, multiplicado por D, pode ser convertido no quadrado de um número inteiro t. Visto que

$$\lambda u < t < (\lambda+1)u ,$$

o número $u' = t - \lambda u$ é um inteiro positivo seguramente *menor* que u. Se de seguida tomarmos

$$t' = Du - \lambda t \ ,$$

t' é também um inteiro positivo, e obtemos

$$t'^2 - Du'^2 = (\lambda^2 - D)(t^2 - Du^2) = 0 \ ,$$

o que contraria a hipótese sobre u.

Portanto, o quadrado de qualquer número racional x ou é $< D$ ou $> D$.

Daqui resulta facilmente que não existe na classe A_1 um máximo, nem na classe A_2 um mínimo. Pois, se pusermos

$$y = \frac{x(x^2 + 3D)}{3x^2 + D} \ ,$$

temos

$$y - x = \frac{2x(D - x^2)}{3x^2 + D}$$

e

$$y^2 - D = \frac{(x^2 - D)^3}{(3x^2 + D)^2} \ .$$

Se considerarmos x como um número positivo de A_1, então $x^2 < D$, e consequentemente $y > x$ e $y^2 < D$. Por isso também y pertence à classe A_1. Mas, se considerarmos x como um número da classe A_2, então $x^2 > D$, e portanto $y < x$, $y > 0$ e $y^2 > D$. Por isso também aqui y pertence à classe A_2. Por conseguinte, este corte não é produzido por nenhum número racional.

Esta incompletude ou descontinuidade do domínio Q dos números racionais consiste nesta propriedade de que nem todos os cortes são produzidos por números racionais.

Então, sempre que fizermos um corte (A_1, A_2) que não é produzido por nenhum número racional, criamos um novo número, um número *irracional* α, o qual consideramos completamente definido por este corte (A_1, A_2); diremos que o número α *corresponde a este corte* ou que *produz este corte*. Por isso, de agora em diante, a cada corte bem definido corresponde um número racional ou irracional bem definido, e consideramos dois números como *diferentes* ou *desiguais* se e só se eles correspondem a cortes essencialmente diferentes.

Para obter uma base para o arranjo ordenado de todos os números *reais*, isto é, de todos os números racionais e irracionais, devemos investigar a relação entre dois cortes quaisquer (A_1, A_2) e (B_1, B_2) produzidos por quaisquer dois números α e β quaisquer. Obviamente o corte (A_1, A_2) é completamente dado quando uma das duas classes, por exemplo, a primeira A_1 é conhecida, porque a segunda A_2 consiste em todos os números racionais não contidos em A_1, e a propriedade característica da primeira classe baseia-se no seguinte: se um número a_1 está nela contido, também nela estão todos os números menores que a_1. Se agora compararmos tais primeiras classes A_1, B_1 uma com a outra, pode acontecer:

1. Que as classes são perfeitamente idênticas, isto é, que todo o número contido em A_1 também está em B_1, e que todo o número em B_1 está em A_1. Neste caso, A_2 é necessariamente igual a B_2, e os dois cortes são perfeitamente idênticos, que denotaremos em símbolos por $\alpha = \beta$ ou $\beta = \alpha$.

2. Se agora este número a'_1 é o único em A_1 que não está em B_1, então todo o número a_1 em A_1 também está em B_1 e é consequentemente $< a'_1$, isto é, a'_1 é o maior de todos os números a_1 ; portanto, o corte (A_1, A_2) é produzido pelo número racional $\alpha = a'_1 = b'_2$. Considerando o outro corte (B_1, B_2) já sabemos que todos os números b_1 em B_1 também estão em A_1, e são menores que o número $a'_1 = b'_2$ que está em B_2; todos os outros números b_2 em B_2 têm que ser maiores do que b'_2, caso contrário, seriam menores do que a'_1, e por conseguinte contidos em A_1 e portanto em B_1; por esta razão b'_2 é o menor de todos os números contidos em B_2, e consequentemente o corte (B_1, B_2) é produzido pelo mesmo número racional $\beta = b'_2 = a'_1 = \alpha$. Os dois cortes diferem então, apenas, de maneira não essencial.

3. Se, porém, existirem em A_1 pelo menos dois números diferentes $a'_1 = b'_2$ e $a''_1 = b''_2$, que não estão em B_1, então existe uma infinidade deles, pois

a infinidade de números que está entre a'_1 e a''_1 está obviamente contida em A_1 mas não em B_1. Neste caso, dizemos que os números α e β correspondentes a estes dois cortes essencialmente diferentes (A_1, A_2) e (B_1, B_2) são *diferentes*, e mais que disso, que $\alpha > \beta$ e $\beta < \alpha$. De notar que esta definição coincide completamente com a outra dada mais acima, quando α, β são racionais.

Os restantes casos possíveis são:

4. Se existe em B_1 um e um só número $b'_1 = a'_2$, que não está em A_1, então os dois cortes (A_1, A_2) e (B_1, B_2) não são essencialmente diferentes e são produzidos por um mesmo número racional $\alpha = a'_2 = b'_1 = \beta$.

5. Mas, se existe em B_1 pelo menos dois números que não pertencem a A_1, então $\beta > \alpha$, $\alpha < \beta$.

Como aqui terminam os casos possíveis, segue-se que, dos dois números diferentes, um é necessariamente o maior e o outro é o menor, logo existem duas possibilidades. Um terceiro caso é impossível! Isto estava implícito na escolha dos termos comparativos (maior, menor) para designar a relação entre α, β; mas esta escolha só agora foi justificada.

Se considerarmos de novo o caso $\alpha > \beta$ é obvio que o número mais pequeno β, se for racional, pertence certamente à classe A_1; pois como existe em A_1 um número $a'_1 = b'_2$ que pertence à classe B_2, segue-se que o número β, quer seja o maior número em B_1 ou o menor em B_2 é certamente $\leq a'_1$ e, portanto, está contido em A_1. Da mesma forma tem-se de $\alpha > \beta$ que o maior número, α, se for racional, pertence certamente à classe B_2, pois $\alpha \leq a'_1$. Combinando estas duas observações obtemos o seguinte resultado: se um corte (A_1, A_2) é produzido pelo número α então qualquer racional pertence à classe A_1 ou à classe A_2, consoante é menor do que, ou maior do que α; se o número α é ele próprio racional poderá pertencer a uma ou a outra das classes.

Daqui, obtemos finalmente o seguinte: se $\alpha > \beta$, isto é, se existem infinitos números em A_1 que não pertencem a B_1 então existem infinitos números que são ao mesmo tempo diferentes de α e de β; um qualquer tal número racional c é $< \alpha$, porque pertence a A_1; é também $> \beta$ pois está contido em B_2.

Continuidade do domínio dos Números Reais

Em consequência das distinções formuladas, o conjunto de todos os números reais $\mathbb{R}$ forma um domínio bem ordenado de dimensão 1; isto significa que prevalecem as seguintes propriedades:

I. Se $\alpha > \beta$, e $\beta > \gamma$, então também $\alpha > \gamma$. Diz-se que o número β está situado entre α e γ.

II. Se α, γ são dois números distintos, então existem infinitos números diferentes de β situados entre α, γ.

III. Se α é um número bem definido, então todos os números do conjunto R dividem-se em duas classes U_1 e U_2, cada uma contendo infinitos elementos; a primeira classe U_1 compreende todos os números α_1 menores do que α, a segunda classe U_2 compreende todos os números α_2 maiores do que α; o número α pode ser arbitrariamente atribuído à primeira ou à segunda classe e será, respetivamente, o maior número da primeira classe ou o menor número da segunda. Em qualquer dos casos, a separação do conjunto R em duas classes U_1, U_2 é tal que qualquer número da primeira classe U_1 é menor que qualquer número da segunda classe U_2 e diz-se que essa separação é produzida pelo número α.

Suprimem-se as provas destes teoremas, que seguem imediatamente das definições da secção anterior.

Contudo, além destas propriedades, o domínio R possui também *continuidade*, isto é, o seguinte teorema é verdadeiro:

IV. Se o conjunto R de todos os números reais se separa em duas classes U_1, U_2, de tal forma que todo o número α_1 da classe U_1 é menor do que todo o número α_2 da classe U_2, então existe um e um só número α pelo qual a separação é produzida.

Prova. Pela separação ou corte de R em U_1 e U_2 obtemos ao mesmo tempo o corte (A_1, A_2) do conjunto R de todos os números racionais que é definido da seguinte forma: A_1 contém todos os números racionais da classe U_1 e A_2 contém todos os outros números racionais, isto é, todos os números racionais da classe U_2. Seja α o número perfeitamente bem definido que produz este corte (A_1, A_2). Se β é um número qualquer diferente de α, então existem infinitos números racionais c que estão situados entre α e β. Se $\beta < \alpha$, então $c < \alpha$; logo c pertence à classe A_1 e consequentemente também à classe U_1, e como também se tem $\beta < c$, então β também pertence à mesma classe U_1, porque todo o número em U_2 é maior do que todo o número c em U_1. Mas se $\beta > \alpha$, então $c > \alpha$; portanto c pertence à classe A_2 e, consequentemente, também pertence à classe U_2, e visto que ao mesmo tempo $\beta > c$, então β também pertence à mesma classe U_2. Como tal, todo o número β diferente de α pertence à classe U_1 ou à classe U_2 conforme $\beta < \alpha$ ou $\beta > \alpha$; consequentemente, o próprio α é ou o maior número em U_1, ou o menor número em U_2, isto é, α é obviamente o único número pelo qual a separação de R nas classes U_1, U_2 é produzida. Como se queria demonstrar.

Relativamente às operações com números reais, Dedekind discute apenas a adição, considerando-a o caso mais simples e suficiente para poder trabalhar com as outras “operações aritméticas elementares”.

Usando estes *cortes* no conjunto dos números racionais para definir os números reais Dedekind passou a desenvolver a sua aritmética e análise. Por exemplo, provou “pela primeira vez” que $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$.

Quase na mesma altura, o matemático alemão Georg Cantor formulou a caracterização da continuidade de uma maneira semelhante, baseado na ideia da convergência de sequências, por isso este enunciado é também chamado axioma da continuidade Dedekind-Cantor.

2) Da Antiguidade a Dedekind: π, um número que se destaca

Os Gregos, na Antiguidade, já sabiam e haviam demonstrado que há comprimentos incomensuráveis com a unidade de medida, por exemplo, a diagonal do quadrado cujo lado é a unidade de medida. Mas eles sabiam encontrar aproximações racionais de grandezas irracionais $\left(\sqrt{2},\pi\right)$.

Aliás, mesmo em civilizações anteriores (Babilónios e Egípcios, por exemplo), onde não havia ainda a consciência da dificuldade do problema, calculavam-se aproximações racionais destes números irracionais.

A consciência da incomensurabilidade por parte dos antigos gregos, o seu espírito ávido de conhecimento aliado aos processos puramente geométricos com os quais desenvolviam as suas discussões e demonstrações, deram origem a astuciosas soluções. As que persistiram ao longo dos séculos, que não se perderam, continuam a ser apreciadas e nelas se encontram potencialidades para o ensino nos dias de hoje.

De entre essas grandezas irracionais, foi dada particular atenção à relação entre o perímetro de um dado círculo e a sua área. Essa grandeza foi posteriormente designada por π (pi).

Pi é o primeiro número irracional formalmente explorado no ensino básico mas o problema da irracionalidade surge também em diversas situações da matemática elementar e das suas aplicações. Por outro lado, este número despertou um enorme interesse ao longo da história da humanidade, e está relacionado com progressos fundamentais em matemática. Sendo assim, julga-se importante fazer algumas considerações históricas relativas a este número.

2.1 O Número Irracional π

Já os Egípcios sabiam que a relação entre o perímetro de uma circunferência (P) e o diâmetro (D) é a mesma, tal como entre a área e o quadrado do raio, na notação atual,

$$P = \pi D \qquad A = \pi r^2$$

O número π nasceu da observação de que a razão (relação) entre o perímetro e o seu diâmetro é uma constante: $P / D = \pi$.

Esta constante tem um caráter intuitivo; quando o diâmetro aumenta, o perímetro da circunferência aumenta proporcionalmente.

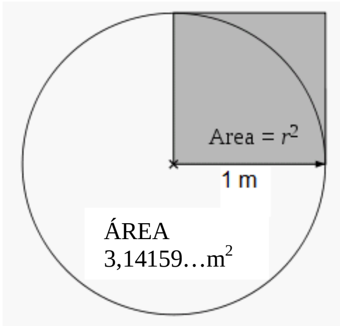


Fig.2 - Área de um círculo com um metro de raio.

A simples observação mostra que essa relação é uma constante, visto que quanto maior é o diâmetro de uma roda, maior é (proporcionalmente) a distância percorrida por um ponto fixo da mesma, ao dar uma volta.

Num espaço euclidiano, a razão entre o perímetro de uma circunferência e o diâmetro da mesma é constante ($\approx 3{,}14$).

Algebricamente, sendo *P* o perímetro da circunferência e *r* o seu raio (o diâmetro, *D*, é o dobro de *r*):

$$\pi = \frac{P}{D} = \frac{P}{2r}.$$

Deduz-se desta fórmula que π é a medida de comprimento da circunferência de um círculo cujo diâmetro é um metro.

É com estas noções intuitivas que se introduz no ensino a definição do número π . Estas propriedades são facilmente verificáveis se se propuserem aos alunos algumas tarefas exploratórias/experimentais com características inicialmente informais, passando gradualmente para algumas definições algébricas, que se tornam úteis para o desenvolvimento de raciocínios e aplicação na resolução de situações problemáticas.

O número π é também definido como a razão entre a área de um círculo e o quadrado do seu raio, $\pi = \frac{A}{r^2}$.

Assim, π é a área em metros quadrados de um círculo de um metro de raio.

Imagine-se um polígono inscrito num círculo *(A)* com um grande número de lados (figura 3). Seja *P* o perímetro do círculo, valor aproximado pela soma dos comprimentos dos lados do polígono. A área do círculo é próxima da área do polígono, sendo esta igual à soma das áreas dos t_i triângulos cujas bases são os lados L_i do polígono. A área de cada triângulo t_i é igual a metade do produto da sua base pela altura, que é pouco diferente de $rL_i / 2$, pois a altura é semelhante a r. Para um grande n, a área do polígono (como a do círculo) é:

$A = (rL_1 / 2 + rL_2 / 2 + \ldots + rL_n / 2) = r(L_1 + L_2 + \ldots + L_n) / 2 = Pr / 2$.

Como $P = 2\pi r$, obtém-se $A = \pi r^2$.

Esta demonstração geométrica, baseada na ideia de que um polígono com um grande número de lados se assemelha a um círculo, pode ser realizada pelo método clássico de passagem ao limite da análise.

Em *(B)* apresenta-se uma ilustração visualmente sugestiva do resultado anterior, onde se corta o círculo em setores que se dispõem numa faixa. Este método de rearranjo parece ser conhecido desde a Antiguidade (Delahaye, 1997).

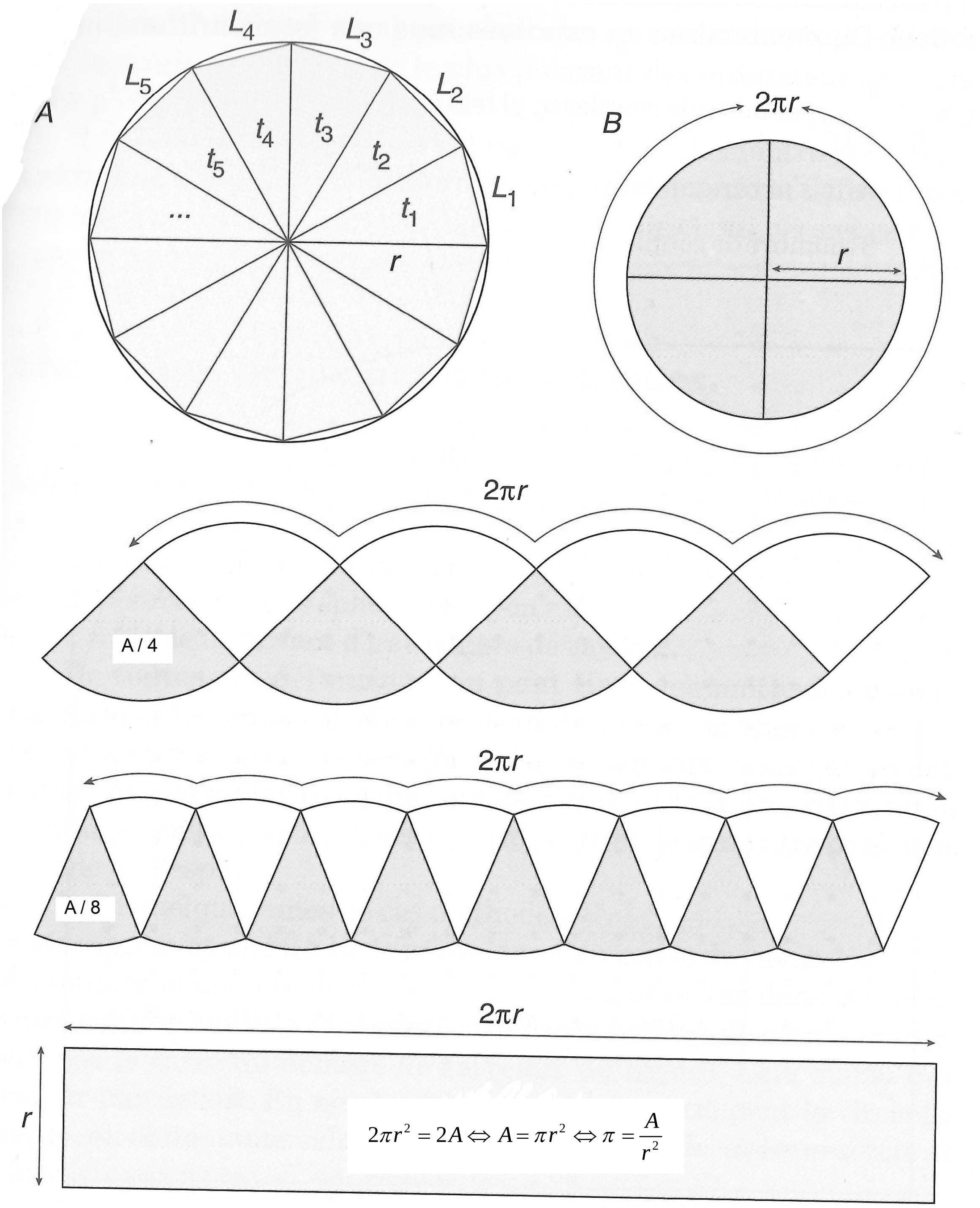


Fig.3

Pode facilmente ser criada uma tarefa para que os alunos verifiquem experimentalmente esta definição, utilizando materiais manipuláveis. Construindo círculos divididos em 4, 6 e 8 partes iguais. As partes são dispostas a fim de formar uma espécie de “paralelogramo curvilíneo” que se vai assemelhando a um retângulo, cuja área se pode calcular utilizando a fórmula *base x altura*. A altura é cada vez mais próxima do raio r, e a base é uma curva que tende para o valor do semi-perímetro do círculo.

A notação "π" tem origem em Arquimedes que, no seu tratado *A medida do Círculo*, designa o comprimento da circunferência por περιμετροζ («perímetro»). William Jones (1675-1749) publica, em 1706, *A New Introduction to Mathematics*, onde utiliza a letra π para designar a razão entre o perímetro de um círculo e o seu diâmetro. Por sua vez, nesta mesma época, Johann Bernoulli (1667-1748) usa a letra *c* para representar essa relação. Mas em 1737, Leonhard Euler (1707-1783) na sua obra *Variae observationes circa series infinitas,* retoma o símbolo π usado por Jones. A notoriedade obtida pela obra impôs como definitiva esta notação. No Egipto do séc. XX, todavia, esta constante foi designada durante algum tempo, por motivos nacionalistas, entre outros, pela letra árabe *ta* em vez de *pi* (Dalahaye, 1997).

Pode dizer-se, usando a terminologia atual, que as tentativas para encontrar um número que traduzisse de forma exata a relação entre o perímetro e diâmetro de uma circunferência consistiram essencialmente em acrescentar decimais ao valor de π. Foram numerosos os matemáticos que em diversas civilizações se dedicaram ao cálculo deste número, num esforço para encontrar a melhor aproximação possível e descobrir mais e mais casas decimais.

Nos próximos parágrafos apresenta-se uma síntese de vários métodos usados para aproximar pi e que poderão ser explorados do ponto de vista didático.

2.1.1 Os Babilónios

Os valores mais antigos de π conhecidos na Antiguidade são $\pi = 3$, $\pi = 3 + 1/7$ e $\pi = 3 + 1/8$.

Estes valores figuram numa placa babilónia em escrita cuneiforme, com cerca de 4000 anos de idade, descoberta em 1936 (Delahaye, 1997).

Os Babilónios parecem ter chegado aos valores da seguinte forma: em primeiro lugar, eles sabiam que o perímetro de um hexágono vale três vezes o seu diâmetro (que é geometricamente evidente e justifica uma primeira aproximação de π por 3); por outro lado, estimaram a razão (perímetro/diâmetro) de um círculo de raio 1, e do hexágono nele inscrito em $57/60+30/(60)^2$ (valor obtido por uma medida aproximada, expressa no sistema de numeração de base 60, por eles utilizada). Dessas premissas, pode deduzir-se que:

$$\pi = 3/\left(\frac{57}{60}+\frac{36}{3600}\right) = 3+\frac{1}{8}$$

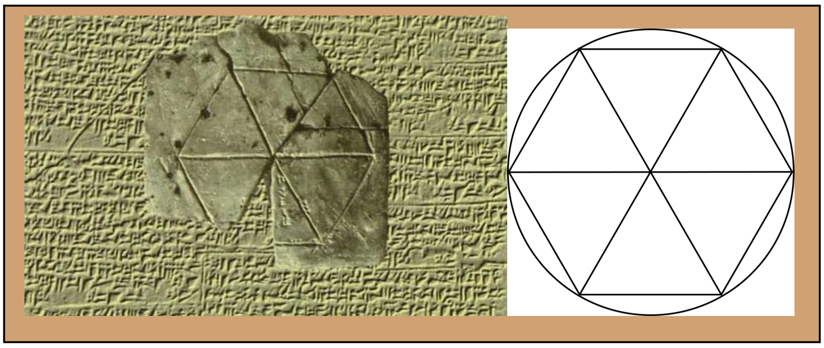


Fig.4 - Foi encontrado numa placa babilónica, escrita com caracteres cuneiformes, a aproximação de $\pi = 3+1/8$. Terão chegado a esse valor comparando o perímetro de um círculo com o de um hexágono inscrito, sendo igual a três vezes o seu diâmetro (Delahaye, 1997).

2.1.2 Os Egípcios

A primeira referência histórica ao problema da quadratura do círculo encontra-se no papiro de Rhind[3]. Esse documento, descoberto em 1855 e guardado no British Museum, terá sido copiado por um sacerdote de nome *Ahmes* (~1550 a.C.) dum manual de problemas ainda mais antigo (provavelmente de 1800 a.C.). O cálculo mencionado neste texto mostra que o valor de π usado é $(16/9)^2 = 3{,}16049...$

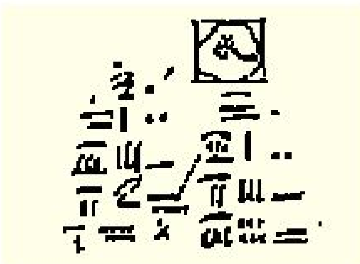


Fig.5 - O problema 48 é o único que se faz acompanhar de uma ilustração geométrica, com um desenho que se assemelha a um octógono.

No problema 50 do referido papiro, *"Exemplo de um campo circular de diâmetro 9. Qual é a área?"*, o método indicado para calcular a área de um círculo consiste em efetuar as operações seguintes: (a) remover a nona parte à medida do diâmetro, de seguida (b) multiplicar o resultado por ele próprio. Este processo é notavelmente simples. Traduzido para notações modernas, a fórmula proposta é $A=(D-D/9)^2=\left[(8/9)D\right]^2$. A fórmula exata será: $A=(D/2)^2\pi$, pelo que se deduz

[3] Este papiro foi comprado em 1858 numa cidade à beira do Nilo, por um antiquário escocês, Henry Rind, sendo por isso conhecido como Papiro de Rhind.

que os Egípcios consideraram implicitamente que $\pi = (16/9)^2 = 3{,}16049...$ Desconhece-se se teriam consciência de que se tratava de um valor aproximado.

O problema 48 do papiro, *“Compare a área do círculo com a do quadrado circunscrito”*, poderá fornecer pistas de como encontraram esta fórmula.

Considere-se um octógono (irregular) construído no interior de um quadrado com nove unidades de lado. A área deste octógono, que se obtém contado o número de quadrados e semi-quadrados de lado 3, é igual a 63. Com a nossa notação, a área do círculo (próxima da área do octógono, apenas ligeiramente superior) é igual a $(9/2)^2\pi$. Substituindo 63 por 64 (que facilita os cálculos e compensa a

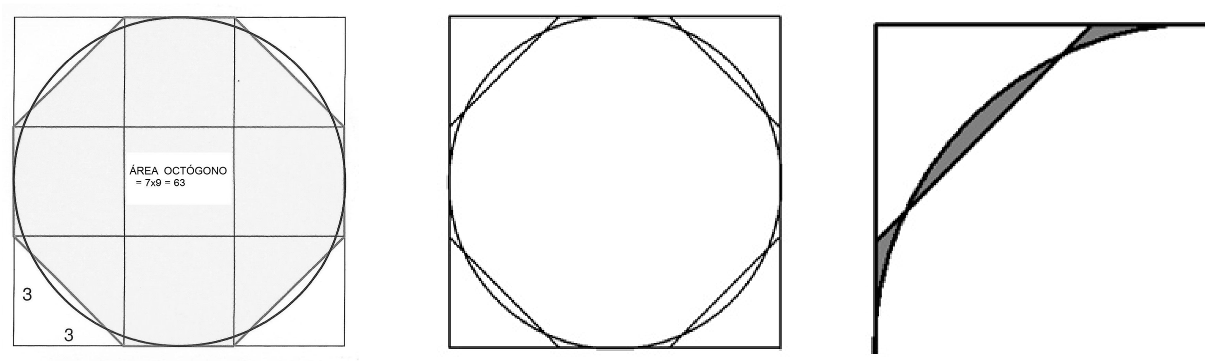


Fig.6 - A regra utilizada para a obtenção do valor $\pi = (16/9)^2$ provém da aproximação da área do círculo a partir de um octógono.

área que parece faltar ao octógono), chega-se a $(9/2)^2\pi = 64$, e assim $\pi = (16/9)^2$ (Delahaye, 1997; Gaspar e Mauro, 2004).

2.1.3 Na Grécia

Na perspetiva essencialmente utilitária da matemática, que era a dos egípcios e babilónios, não era articulada a questão fundamental do problema do círculo, a da relação exata entre diâmetro e perímetro (ou área). Os valores de pi utilizados por esses povos eram adequados às aplicações necessárias a engenheiros e artesãos da Antiguidade, mesmo que houvesse consciência de que não eram exatos.

Já na civilização grega tudo se passou de forma diferente. Os matemáticos gregos tinham consciência da existência desse e doutros problemas relacionados com a natureza dos números irracionais e sabiam que não existia uma maneira simples de medir o círculo. Uma das formas típicas da matemática grega de traduzir essa dificuldade era a chamada “quadratura do círculo”, uma expressão que durou até aos dias de hoje com múltiplos significados.

A quadratura de figuras geométricas, ou seja, o método que consiste em construir com régua e compasso um quadrado com a mesma área de uma figura dada, era uma prática habitual na matemática grega. Medir uma figura significava compará-la com outra, em geral um quadrado, por questões de simplicidade.

A quadratura do círculo, um dos «três problemas famosos da Antiguidade[4]», consistia então em encontrar, por construção geométrica, usando apenas régua e compasso, um quadrado cuja área fosse exatamente, e não aproximadamente, a de um dado círculo. Este problema é equivalente à retificação do círculo, que consiste em traçar um segmento com a mesma medida de comprimento da circunferência de um dado círculo, construindo-se assim o número π com régua e compasso.

Para os gregos a ideia de número era reservada aos inteiros. Os racionais eram considerados razões entre números e é essa a origem do nome “racional”. O facto de associar aos números (ou quantidades) grandezas geométricas permitia ultrapassar o problema da definição de quantidades não inteiras. De facto, ao comparar duas grandezas geométricas a noção de razão ou proporção surge naturalmente. Por outro lado, certas grandezas, como π, tinham apenas representação geométrica e eram considerados “quantidades” e não números.

Na matemática grega, a tradução de quantidades numéricas por grandezas geométricas, não se limitou contudo à representação dos números. A utilização da geometria estendeu-se às operações com números. Nos livros de Aritmética os números são representados por linhas, o produto por retângulos. Todas as equações são tratadas em termos de construções geométricas. A adição e a subtração de grandezas sob a sua representação geométrica em superfícies originou construções que lhes permitiam resolver todas as formas de equação de 2º grau que dão raízes positivas, sob a forma que corresponde ao enunciado

[4] Os outros dois problemas geométricos do mesmo género que suscitaram bastante interesse nos gregos e nos seus sucessores são *a trissecção do ângulo* (traçar um ângulo equivalente a um terço de um ângulo dado, ou seja, dividir um ângulo em três ângulos congruentes) e *a duplicação do cubo* (construir um cubo com o dobro do volume de um cubo inicial).

geométrico da determinação de duas quantidades de que se conhece a *soma* e o *produto*.

Os gregos encontraram assim uma forma de tratar os números irracionais de forma rigorosa, embora não possuíssem uma forma adequada de representação, ou antes, uma forma de representação que permitisse fazer facilmente operar com as quantidades e explorar as potencialidades desses objetos que são os números. Na Grécia, “Uma *álgebra geométrica* tomara o lugar da antiga *álgebra aritmética*, e nessa nova álgebra não podia haver somas de segmentos com áreas ou de áreas com volumes” (Boyer, 1968).

A álgebra geométrica dos gregos permitiu-lhes resolver problemas de uma forma que pode ser sugestiva no ensino, pois permite uma visualização geométrica de relações e de equações algébricas. É, por exemplo, o caso das proposições 4,5,6 e 11 apresentadas no Vol. II dos *Elementos* de Euclides.

Anaxágoras (500-428 a.C.) e Antifonte (sofista ateniense do séc. V a.C.) estão entre os primeiros nomes referidos por tentarem resolver o problema da quadratura do círculo. No seu processo, Antifonte inscrevia polígonos regulares, cujo número de lados aumentava indefinidamente, formando uma progressão geométrica de razão 2, e concluindo erroneamente que, prosseguindo a construção até ao infinito, o polígono se confundia com uma circunferência. Estes filósofos não tiveram a ideia de considerar a circunferência como limite destes polígonos, não chegando a tirar as conclusões que mais tarde levariam Arquimedes à *Medida do círculo*.

A ideia deste método é devida a Eudóxio de Cnido, que sugeriu uma abordagem que permitia comparar figuras curvas com figuras poligonais - o *método da exaustão*. Encontra-se no célebre livro de matemática, *Elementos* de Euclides (séc. III a.C.), livro X, teorema I, o que mais tarde foi chamado de método (ou princípio) de exaustão. “Consiste este método em confrontar as diferentes partes em que se supõe decomposta uma grandeza, cujo valor se pretende conhecer, com duas grandezas conhecidas, variáveis segundo leis dadas, entre as quais a primeira fica constantemente compreendida, e que tendem a diferir da mesma menos do que qualquer quantidade assinalável” (Vasconcellos, 1925).

Esta afirmação é equivalente às definições rigorosas de limites formuladas no séc. XIX. É possível estabelecer também uma analogia entre o princípio de exaustão e a determinação de áreas e volumes usando o cálculo integral. Permite estabelecer com um certo rigor, que o «π» de $P = 2\pi r$ é o mesmo que o de $A = \pi r^2$ num espaço euclidiano.

Ao tentar resolver a quadratura do círculo, Hipócrates de Quios (séc. V a.C.) obteve um resultado assinalável. Ele conseguiu efetuar a quadratura de várias figuras limitadas por dois arcos circulares de raios diferentes denominadas lúnulas.

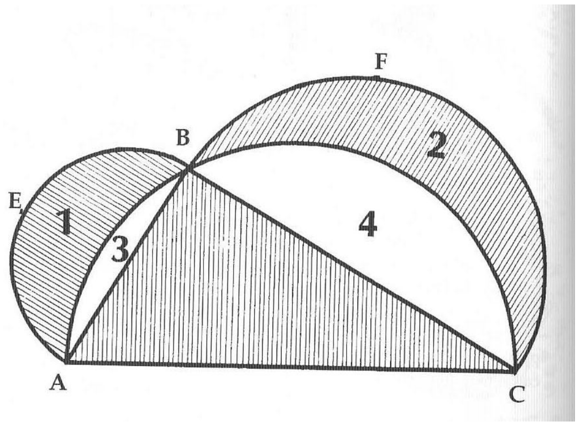


Fig.7 - Uma lúnula é uma figura limitada por arcos circulares. Hipócrates calculou a área das lúnulas com a intenção de fazer a quadratura do círculo.

Contrariamente ao que sucede com o círculo, é possível quadrar as lúnulas.

A partir de uma dedução do Teorema de Pitágoras, segundo a qual a soma das áreas dos semicírculos construídos sobre os catetos é igual à área do semicírculo construído sobre a hipotenusa, sabe-se que a soma das áreas das lúnulas é igual à área do triângulo.

Partindo da figura 7,

seja R o semicírculo (1+3), S o semicírculo (2+4) e T o triângulo retângulo,

sabendo que

$$A_R + A_S = A_3 + A_T + A_4$$

e que

$$A_R = A_1 + A_3 \quad ; \quad A_S = A_2 + A_4$$

substituindo

$$A_1 + A_3 + A_2 + A_4 = A_3 + A_T + A_4$$

Verifica-se que

$$A_1 + A_2 = A_T$$

No ponto II.1. é apresentada uma exploração deste tipo de quadratura.

A Hípias de Élis (finais do séc. V a.C.) é atribuída também uma proposta interessante da quadratura do círculo – a trissectriz ou quadratriz. É traçada da seguinte forma: no quadrado ABCD (figura 8) seja o lado AB deslocado para baixo uniformemente a partir da sua posição inicial até coincidir com DC, e suponhamos que esse movimento leve exatamente o mesmo tempo que o lado *DA* leva para girar em sentido horário da sua posição inicial até coincidir com *DC*. Se as posições dos dois segmentos são dadas num qualquer instante fixado por $A'B'$ e DA'', respetivamente, e se *P* é o ponto de intersecção de $A'B'$ e DA'', o lugar descrito por P durante esses movimentos será a trissectriz de Hípias – a curva *APG* na figura.

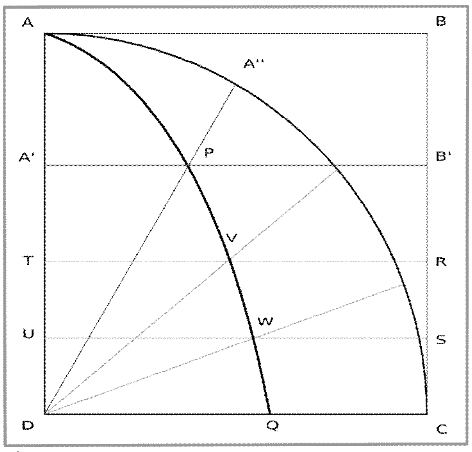


Fig.8

Dada essa curva, faz-se a trissecção de um ângulo com facilidade.

Pode ser experimentado em http://www.fc.up.pt/mp/jcsantos/Hipias.html

Por exemplo, se *PDC* é o ângulo a ser trissectado, simplesmente trissectamos os segmentos $B'C$ e $A'C$, com os pontos *R*, *S*, *T* e *U*. Se as retas *TR* e *US* cortam a trissectriz em *V* e *W*, respetivamente, as retas *VD* e *WD*, pela propriedade da trissectriz, dividirão o ângulo *PDC* em três partes iguais.

A curva de Hípias é geralmente chamada de quadratriz pois pode ser usada para quadrar o círculo. Não há a certeza de que Hípias conhecia essa aplicação mas é possível que, embora a conhecesse, não soubesse usá-la com tal finalidade (Boyer, 1968). A quadratura por meio da curva de Hípias foi proposta mais tarde por Dinóstrato, em 335 a.C.. "Naturalmente, era sempre perfeitamente claro para os gregos que o uso da curva para problemas de trissecção e quadratura viola as regras do jogo – que só permitem círculos e retas. As "soluções" de Hípias e Dinóstrato, como os seus autores sabiam, eram sofisticadas; por isso a procura de outras soluções, canónicas ou ilegítimas, continuou, resultando em várias novas curvas descobertas pelos geómetras gregos" (Boyer, 1996).

O interesse manifestado por muito geómetras amadores pretensos “quadratores de círculo”, foi ridicularizado por Aristófanes (~445-~386), um autor teatral grego, na sua peça “Os Pássaros”.

Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.), dedicou-se a investigações sobre Geometria plana e sólida, Aritmética, Mecânica, Hidrostática e Astronomia. Fez progressos consideráveis na aproximação dada ao número π. No seu livro *Medida do círculo* ele começa por estabelecer que a relação entre o perímetro e o diâmetro da circunferência é igual à relação entre a área do círculo e o quadrado do raio. Viu-se que, ao procurar uma medida do círculo, os Babilónios e os Egípcios usaram respetivamente um hexágono e um octógono inscritos. A técnica, que surge naturalmente do conhecimento das áreas de polígonos, foi aproveitada por Arquimedes para determinar o perímetro da circunferência. A ideia de base é a mesma – comparação da linha poligonal com a linha curva – mas Arquimedes dá-lhe um alcance completamente diferente. Ele vai considerar não um polígono mas sim duas sucessões de polígonos inscritos e circunscritos de 6, 12, 24, 48 e 96 lados (ou seja, de 2×3^n lados).

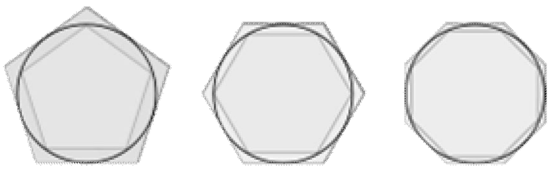


Fig.9 - Sucessão de polígonos inscritos e circunscritos

O perímetro dos polígonos inscritos aumenta quando o número de lados aumenta, aproximando-se do perímetro da circunferência. Com os polígonos circunscritos passa-se o contrário, os seus perímetros diminuem quando o número de lados aumenta. Arquimedes calculou a relação entre os perímetros de dois polígonos sucessivos. Isso permite-lhe calcular o perímetro da circunferência com uma aproximação cada vez maior, à medida que se aumenta o número de lados.

O perímetro da circunferência tem um valor compreendido entre os valores dos polígonos interior e exterior ou, como se diz, está enquadrado entre dois valores.

Este enquadramento é**,** segundo Jean Dhombres (1985), o grande feito de Arquimedes. O enquadramento do perímetro da circunferência, permite, usando a notação atual, escrever o resultado para o valor de π ,

$$3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{1}{7} \text{, ou } \frac{223}{71}<\pi<\frac{22}{7}$$

ou, escrevendo de outra forma: 3,140845 <π< 3,142857; obtém-se assim uma aproximação com duas casas decimais corretas.

O que é extraordinário neste resultado de Arquimedes é que, para o obter não foi usado nem cálculo algébrico nem o nosso sistema de numeração posicional, que o teria facilitado muito.

O resultado é importante, não só porque é o primeiro a estabelecer um enquadramento do valor de π , mas também pelo método usado:

Considera um círculo de raio 1, no qual enquadra, no interior e no exterior, dois polígonos de 3×2^n lados. Considere-se a_n o semi-perímetro do polígono circunscrito, e b_n o meio perímetro do polígono inscrito.

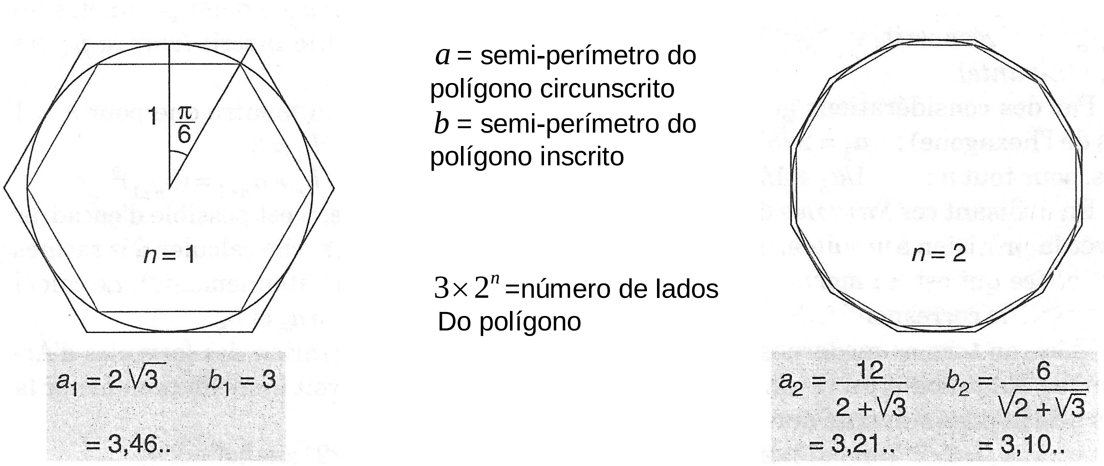


Fig.10 - No seu tratado *A medida do círculo*, Arquimedes apresenta o seu método de cálculo de π utilizando polígonos.

Por considerações geométricas mostra-se que, para $n=1$,

no caso do hexágono, $a_1 = 2\sqrt{3}$ e $b_1 = 3$

logo, para todo o n , $\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}=\frac{2}{a_{n+1}}$ e $b_n \times a_{n+1} = \left(b_{n+1}\right)^2$

Utilizando estas fórmulas de recorrência, é possível enquadrar π com o rigor desejado, desde que se saibam calcular raízes quadradas (o que poderá até ser realizado por tentativa-erro). O cálculo de Arquimedes corresponde às avaliações de a_5 e b_5.

Em termos modernos, tomando o raio do círculo igual a 1, verifica-se, pela observação da figura anterior que[5]:

$$a_n = 3\times 2^n \tan\left[\pi / (3\times 2^n)\right] \qquad b_n = 3\times 2^n \sin\left[\pi / (3\times 2^n)\right]$$

As aproximações dadas pelo algoritmo de Arquimedes são:

$$\begin{array}{ll} b_1 = 3 & a_1 = 3,464101616 \\ b_2 = 3,105828540 & a_2 = 3,215390308 \\ b_3 = 3,132628612 & a_3 = 3,159659942 \\ b_4 = 3,139350206 & a_4 = 3,146086216 \\ b_5 = 3,141031951 & a_5 = 3,142714600 \end{array}$$

Ao considerar as duas sucessões de polígonos, cada vez mais “próximos” da circunferência, Arquimedes está a usar o método da exaustão inventado por Eudóxio. Este método foi desenvolvido por Arquimedes e, no Renascimento, tornou-se o modelo para o cálculo de áreas e volumes. Ainda hoje se usa um método análogo, embora adaptado aos processos de representação e de cálculo da matemática atual. A ideia de base é a mesma – para calcular a área ou o perímetro definidos por uma curva (a circunferência ou outra), substitui-se a curva por uma linha poligonal e calcula-se o espaço ou o comprimento assim definido.

O processo de aproximações sucessivas usado por Arquimedes conduziu à noção de limite. Usando linguagem de limites, dir-se-ia que quando a linha poligonal “tende” para a linha curva, o seu comprimento “tende” para o comprimento da curva.

Porém, em Arquimedes não há qualquer sugestão de que é possível prolongar o cálculo indefinidamente, ou seja, a ideia de limite nunca é explicitada. Para poder definir a soma de uma série infinita será necessário desenvolver o conceito de número real, que os gregos não possuíam. A noção de limite pressupõe a

[5] Demonstração das fórmulas de Arquimedes presentes em Delahaye, 1997, pp.55-57.

consideração do infinito, que esteve sempre excluído da matemática grega. Mas, no entanto, o seu trabalho foi, provavelmente, o maior incentivo para o desenvolvimento posterior de tais ideias. De facto, os trabalhos de Arquimedes constituem a principal fonte de inspiração para a geometria do séc. XVII, que desempenhou um papel importante no desenvolvimento do cálculo infinitesimal.

Arquimedes é um matemático do período alexandrino, no fim do qual o objetivo da geometria grega se focaliza nas aplicações. Os seus sucessores – Hiparco (~190-120 a.C.), Herão (~10-75), Ptolomeu (~90-168) – ocupam-se da astronomia, mecânica e ótica. No entanto, os métodos de Arquimedes não foram esquecidos. No séc. III d.C. Pappus (~379-395) utiliza-os, acrescentando um novo resultado aos trabalhos de Arquimedes sobre o centro de gravidade: o “teorema de Pappus”.

O desenvolvimento dos métodos geométricos dependeu, no entanto, do progresso de outros ramos da matemática. Um deles foi o da criação da álgebra simbólica. Outro foi a introdução, na álgebra e na geometria, do conceito de variável e de função.

A álgebra grega atinge o seu maior desenvolvimento com a *Arithmetica* de Diofanto (~200-290), uma obra que constitui a transição da álgebra puramente retórica para o simbolismo algébrico. Para que os seus resultados pudessem ser usados como uma base de cálculo foi, no entanto, necessário torná-la completamente simbólica. A generalização do conceito de número e os conceitos de variável e função foram também indispensáveis.

2.1.4 Noutras Civilizações

Embora na história da matemática se omita muitas vezes as contribuições dos povos não europeus, no caso do número pi tem interesse referir, ainda que parcial e sucintamente, algumas dessas contribuições. A preocupação em determinar pi põe em evidência a importância que esse número assumiu em diversas culturas.

Os Maias

A ciência dos Maias, cuja história remonta há mais de 2000 anos[6], parece ter atingido um alto grau de conhecimento matemático e trigonométrico, a julgar pela extraordinária precisão dos seus sistemas de calendários. De acordo com alguns especialistas, os Maias utilizavam valores de π com uma precisão de pelo menos oito casas decimais, bem antes dos antepassados dos seus invasores Europeus. Esta afirmação, puramente especulativa, baseia-se nos poucos documentos que não foram destruídos pelos Europeus. Sabe-se, por exemplo, que Diego de Landa, monge franciscano, posteriormente nomeado bispo de Iucatã (território que os espanhóis haviam conquistado) queimou os documentos maias encontrados. Descrevendo as suas próprias ações, Landa escreveria mais tarde: *Encontrámos um grande número de livros escritos com estes caracteres e, como não continham nada que não pudesse ser visto como superstição e mentiras do diabo, a todos queimámos, o que eles [os maias], muito lamentaram, causando-lhes grande aflição*. Foi talvez um importante capítulo da história de π que se perdeu para sempre. Em todo o caso, os conhecimentos dos Maias, relativos em particular aos ciclos do sol e dos planetas, dão consistência à especulação acerca dos seus conhecimentos sobre o número pi.

Na Índia

Um dos documentos indianos mais antigos em que estão presentes cálculos com π é um livro denominado Paulisha Siddhanta, que data aproximadamente de 380[7]. Este texto utiliza a aproximação racional 3 + 177/1250 = 3,1416, que apresenta semelhanças à aproximação obtida por Arquimedes por volta de 250 a.C..

Aryabhatiya é um pequeno volume escrito em verso no ano 499, sobre astronomia e matemática, pelo matemático hindu Aryabhata (476-550). Neste texto é utilizado para π o valor 3,1416, obtido a partir da aproximação racional $62832/20000$. Esta aproximação foi obtida, provavelmente, a partir do conhecimento da matemática grega.

---

[6] Os indícios da origem da civilização maia repousam nos sítios arqueológicos da península de Iucatã, que datam entre 700 e 500 a.C. Contudo, novas pesquisas admitem uma organização mais remota, estabelecida em 1500 a.C..

[7] Foi resumido pelo matemático hindu Varahamohira (viveu em 505) e foi citado frequentemente pelo estudioso árabe Al Biruni, que sugeriu uma origem ou influência grega.

Brahmagupta (596-665), que viveu na Índia Central um pouco mais de cem anos depois de Aryabhata, no seu texto *Brahmasphuta Siddhanta* propõe um valor para π de $\sqrt{10} = 3{,}162277$, menos preciso que o dos seus predecessores.

Na China

As informações não são precisas no que ao conhecimento matemático em geral diz respeito, nem à utilização de π em particular. Alguns afirmam que no século XII a.C. os Chineses utilizavam o valor 3.

No ano 130 da nossa era, Hou Han Shu propôs o valor 3,1622, muito próximo de $\sqrt{10}$. Como o sistema decimal foi sempre utilizado na China, esta aproximação foi sem dúvida obtida como valor decimal aproximado de $\sqrt{10}$.

Em 263, o matemático Liu Hui estuda um polígono de 192 lados, tal como havia feito Arquimedes, e propõe o seguinte enquadramento:

$$3{,}141024 < \pi < 3{,}142704 .$$

Posteriormente, com um polígono de 3 072 lados, obteve $\pi = 3{,}14159$.

No séc. V, Tsu Chung-Chih e o seu filho Tsu Keng-Chih (também se escreve Zu Chongshi) obtêm o enquadramento:

$$3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927$$

e descobrem o valor aproximado 355/113, o qual representa uma aproximação notavelmente boa, que só será atingida na Europa no séc. XVI.

Este avanço parece ser devido à utilização do sistema decimal – superior aos sistemas utilizados noutros locais – que facilita os cálculos e permite ir mais além.

A Bíblia

Por curiosidade, alguma bibliografia faz referência a uma passagem da Bíblia que conta pormenores da construção do templo de Salomão. No texto utiliza-se implicitamente o valor de $\pi = 3$. Mais propriamente, utilizando de forma adequada os valores referidos, chegar-se-ia a esse valor. Em I Reis – VII lê-se “Construiu também um mar de bronze[8], redondo, que media dez côvados, dum bordo ao outro; tinha cinco côvados de altura, e um fio de trinta côvados media-lhe todo à volta".

2.1.5 Da Grécia ao Renascimento

A cultura grega tem influenciado, durante séculos, o pensamento científico e filosófico numa grande região do globo, tendo os árabes desempenhado um papel determinante na difusão dessa cultura. Mas os árabes não só absorveram a cultura grega mas também adotaram o sistema numérico posicional usado na Índia, que posteriormente foi transmitido ao Ocidente. A partir da assimilação das heranças grega e oriental, desenvolvem-se autonomamente novos ramos da matemática, em particular o da álgebra. Esse desenvolvimento foi propiciado por determinadas circunstâncias sociais, como por exemplo a existência de um centro de cultura fundado durante o séc. IX em Bagdade, uma espécie de universidade, chamada "casa da sabedoria". O desenvolvimento da matemática árabe irá desempenhar um papel essencial alguns séculos mais tarde, no renascimento científico europeu, por influência dos cientistas árabes de Espanha e Sicília.

Embora a álgebra constitua a maior contribuição dos árabes para a matemática, houve também trabalhos em geometria e em trigonometria, em particular com o círculo, mas sempre de um ponto de vista prático. O matemático mais famoso da casa da sabedoria de Bagdad, Al-Khwarizmi[9], elabora uma compilação de regras de medida em geometria, quase todas sem demonstração, ou seja, sem as exigências da matemática grega. Mas mesmo do ponto de vista prático, o rigor no valor de π de Al-Khwarizmi (790-850) não excede o de Arquimedes. Depois de Arquimedes, não foi conseguido nenhum progresso notável no cálculo de π no Ocidente. O valor mais rigoroso, depois de Arquimedes, foi o já referido 3,1416, de Aryabhatiya.

Alguns séculos mais tarde, em 1424, Al-Kashi (1380-1429), matemático e astrónomo, publica o seu tratado sobre a circunferência onde calcula o valor de

[8] Mar de bronze – grande recipiente, em forma de meia esfera, assim chamado pela grande quantidade de água, 45 000 a 78 000l, que podia conter, para as abluções, lustrações e outros usos culturais. É possível que haja exagero nos números ou que o texto tenha sofrido modificações. A água vinha canalizada para este grande reservatório e havia também esgotos para as sobras da água.

[9] Muhammad ibn Musa Al-Khowarizmi, também escrito Al'Khwarizmi ou Al-Huwarizmi, nome que está na origem da palavra algoritmo e algarismo), nascido em Huwarizm (nos dias de hoje Khiva no Uzbequistão).

2π com nove casas exatas em notação sexagesimal (dezasseis casas decimais). É o melhor resultado obtido até então e que foi ultrapassado apenas duzentos anos mais tarde por Van Ceulen (1540-1610).

A importância da matemática árabe vai muito para além dos resultados que é possível citar sobre a medição da circunferência. O fenómeno essencial pode caracterizar-se pela emergência de uma outra matemática, não helenística, que precede e, até certo ponto, define as matemáticas clássicas, influenciando decisivamente a matemática europeia. Durante o período inicial da expansão islâmica (séculos VII e VIII) o domínio cultural dos invasores manifestou-se essencialmente pela imposição da língua, o que acabou por ter efeitos sobre outros aspetos da cultura, em particular da cultura matemática. Um exemplo da renovação cultural do Ocidente por via das conquistas árabes foi o interesse demonstrado pela tradução, para árabe, de inúmeras obras gregas. Essa renovação manifesta-se pelo desenvolvimento de novos ramos da matemática, em particular da álgebra e pela constituição de áreas como a análise numérica ou a análise combinatória e a evolução de outras, como a teoria dos números, herdada da matemática grega. Por outro lado, é o desenvolvimento das matemáticas sob o impulso destas novas áreas que vai permitir a evolução do conceito de número.

Em particular, os métodos para encontrar valores aproximados dos números irracionais possibilitaram uma melhor compreensão da estrutura dos reais. Por exemplo, uma das consequências importantes do esforço para encontrar métodos de aproximação foi a invenção das frações decimais. Na matemática árabe nasce uma nova conceção de número, compreendendo simultaneamente todos os números reais positivos, assinalada pelo uso da mesma palavra *adad* (número). Para os números racionais, *al-adad al muntiqa*, e os números irracionais designados por *al-adad al-summa*. Progressivamente, a partir de Abu Kamil (850-930) e até Al-Samaw'al (1130-1180), os números irracionais tornaram-se, definitivamente, objetos da álgebra e da aritmética: grandezas geométricas incomensuráveis e quantidades numéricas irracionais passaram a confundir-se. Para isso contribuiu sem dúvida a generalização das operações aritméticas aos irracionais algébricos, incluindo o cálculo de raízes.

Este processo, muitas vezes utilizado na investigação matemática, o de realizar cálculos sem a preocupação de os legitimar completamente, deu frutos em muitas outras épocas. Tanto o desenvolvimento dos métodos infinitesimais como a manipulação de funções são exemplos desse modo de trabalhar, tão afastados dos processos rigorosos dos gregos. Continuava a subsistir, evidentemente, a impossibilidade de definir com rigor certos “números” que resultavam das operações ou da representação de quantidades geométricas sem que, no entanto, essa impossibilidade bloqueasse o avanço do conhecimento.

Os árabes, ao manipular as grandezas irracionais sem grande preocupação de as definir com rigor, acabaram por se familiarizar com e estrutura contínua dos reais. Os aritmético-algebristas nunca levantaram questões acerca do estatuto dessas grandezas incomensuráveis e das razões do sucesso da generalização das operações a essas grandezas.

“O século XIII, com uma mais ativa tradução em latim das obras dos árabes e a fundação de novas universidades, marca o início de uma nova era na história do ser humano, que com o aumento da prosperidade económica que acompanhou a libertação dos servos e o estabelecimento das mais intensas relações entre a Europa e a civilização Oriental, deu singular impulso aos estudos matemáticos, com progressos sucessivamente realizados, em que o ensino, libertando-se da simples imitação ou reprodução das obras árabes, prepara os espíritos para a leitura dos textos gregos, e cria um vigor e uma aptidão especiais, que, ao calor vivificante da Renascença, lançaria os cultores das ciências exatas na senda – gloriosamente traçada pelos grandes pensadores da antiga Grécia – da investigação e da descoberta” (Vasconcellos, 1925).

A transição da matemática árabe para a matemática europeia renascentista não se fez, no entanto, apenas pela absorção de conhecimentos algébricos e pela manipulação de números. Um dos suportes onde assentaram as mudanças ocorridas durante o séc. XVII foi a reflexão dos filósofos escolásticos acerca do problema do contínuo e do infinito herdado da matemática grega.

Contemporaneamente com a Escola Pitagórica, havia em Itália um outro centro filosófico importante, o de Eleia, que foi fundando por Senófanes (fins do séc. VI a.C.). A esta Escola pertenceu o filósofo Zenão que, a partir de alguns paradoxos, tentou provar a insuficiência da ideia de infinito, defendendo que as grandezas não seriam suscetíveis de uma divisão ilimitada. “A singular habilidade dos seus paradoxos, não obstante estabelecerem resultados nada duvidosos em si, levou os Gregos a pôr de parte, no século seguinte, a ideia de infinito como meio de demonstração positiva” (Vasconcellos, 1925). “Os Gregos evitavam cuidadosamente “considerar o limite” explicitamente, e este virtual “horror do infinito” é provavelmente responsável pela clareza lógica do método de exaustão” (Edwards, Jr., 1979, p.16).

Com o cálculo infinitesimal, o infinito começa a ser considerado de forma diferente, mas mesmo antes a facilidade de manipulação dos números facilitou novas abordagens da questão.

Nicole Oresme (1323?-1382), em meados do séc. XIV, apresenta várias técnicas que antecipam conceitos e terminologia associados ao cálculo diferencial, preconizado por Newton três séculos mais tarde. Utilizando referenciais associados a duas dimensões (e até a três), socorre-se do processo gráfico para provar alguns teoremas que fazem intervir uma soma infinita. No exemplo seguinte (figura 11) Oresme deu uma explicação geométrica para soma da série infinita

$$4 = 1 + 2.1/2 + 3.(1/2)^2 + 4.(1/2)^3 + 5.(1/2)^4 + \dots$$

É colocado um retângulo com uma unidade de altura e duas unidades de comprimento sobre uma linha de base AB. Um outro retângulo, igual ao anterior, é dividido em partes proporcionais (1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, e assim sucessivamente) sendo estas colocadas separadamente sobre o primeiro retângulo numa coluna vertical.

A superfície representada tem o dobro da área do retângulo original, sendo que a altura aumenta até ao infinito. Somando a área dos infinitos retângulos verticais tem-se

$$4 = 1 + 2.\frac{1}{2} + 3.\frac{1}{4} + 4.\frac{1}{8} + 5.\frac{1}{16} + \dots,$$

somando as áreas dos retângulos horizontais tem-se

$$4 = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \dots$$

A sua soma usando técnicas geométricas foi uma inspiração para posteriores explorações das séries infinitas no séc. XV pelo português Alvarus Thomas e outros (Baron, 1969).

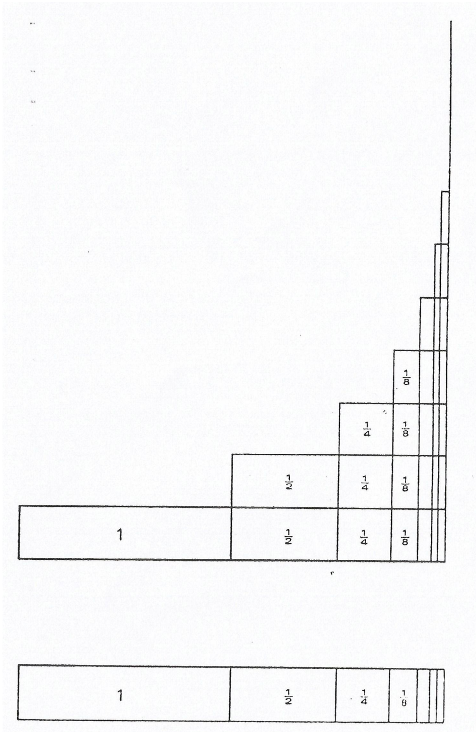


Fig.11

O Renascimento tem início em Itália no séc. XV. A grande renovação no pensamento europeu, altera a conceção de vida do Homem que na Idade Média era centrada em Deus. As relações comerciais dos italianos com árabes e gregos proporcionam a transmissão do conhecimento da arte e da ciência dos tempos clássicos gregos. Foi crescente o interesse pelo conhecimento em diversas áreas, entre elas a matemática. O início do séc. XVI ficou marcado pelas disputas entre algebristas italianos, dos quais se destaca Girolamo Cardano (1501-1576) e Nocolò Fontana (1499-1577) mais conhecido por Tartaglia, que significa "gago". A pretensão de resolver algebricamente equações (quadráticas, cúbicas, quárticas) cria desafios que suscitam uma evolução significativa do conceito de número, na medida em que vai ocorrendo um distanciamento gradual do suporte geométrico, começando também a ser introduzido novo simbolismo no tratamento das equações. Como refere Cousquer (1994, pág.30), o desenvolvimento da álgebra na Europa com os algebristas italianos, a elaboração lenta de uma simbologia algébrica, desempenham um papel no desenvolvimento do conceito de número real, acarretando a uniformização dos processos de cálculo, quer a incógnita se refira a números (racionais) ou a grandezas.

Na obra *L'Arithmétique*, de 1585, Simon Stevin (1548-1620), matemático dos Países Baixos, apresenta uma definição de número: "Definição I - A Aritmética é a ciência dos números. Definição II - Número é aquilo para o qual se explica a quantidade de cada coisa" (Stevin, 1585, p.1).

Viète (1540-1603), não tendo como ocupação apenas a matemática, deu-lhe um considerável contributo, sendo apelidado por alguns como "o pai da álgebra". Antes deste matemático francês havia já muitas aproximações (boas e más) para a razão entre o perímetro e o diâmetro de um círculo, tais como a de Valentinus Otho (~1550-1605) e Adrian Anthonisz (1543-1620) que, independentemente, redescobriram (por volta de 1573) a aproximação 355/113, subtraindo numeradores e denominadores dos valores de Ptolomeu e Arquimedes, 377/120 e 22/7 respetivamente. Viète calculou corretamente dez decimais de π, aparentemente sem conhecer a aproximação ainda melhor de Al-Kashi (1450), mencionada anteriormente. A melhor realização nessa linha foi a de Ludolph van Ceulen, que publicou em 1596 um valor com vinte casas, obtido a partir de um polígono com 60×2^{33} lados, e em 1609 obteve uma aproximação com trinta e quatro decimais (que a sua esposa fez gravar na sua pedra tumular, que foi destruída no séc. XIX). Uma expressão exata era mais desejável, e foi Viète a dar a primeira expressão numérica para π (teoricamente precisa) como produto infinito, mas não se interrogou acerca da convergência deste produto infinito (esse tipo de preocupações surgiu apenas mais tarde).

$$\pi = 2\times\frac{2}{\sqrt{2}}\times\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\times\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\times\cdots$$

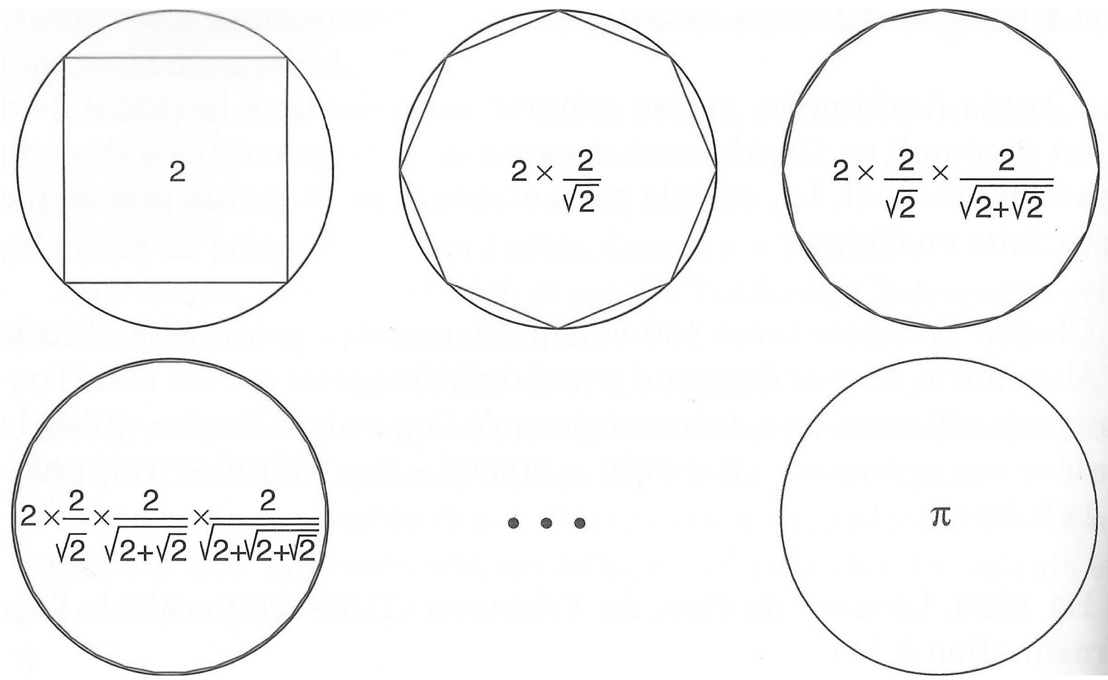


Fig.12

A fórmula de Viète é deduzida a partir de considerações geométricas. Utilizando polígonos de 2^n lados inscritos num círculo de raio 1, foram desenhados e indicada a sua área para n compreendido entre 2 e 5. Esta área tende para π quando n tende para infinito.

O termo 2 corresponde à área de um quadrado inscrito num círculo de raio 1. O termo $2\times 2/\sqrt{2} = 2\times\cos(\pi/4)$ corresponde à área do octógono. Multiplica-se por $1/\cos(\pi/8)$ de modo a passar ao polígono de 16 lados, de seguida por $1/\cos(\pi/16)$ para passar ao polígono de 32 lados, e assim sucessivamente. Este resultado deriva da fórmula: $\cos a = \sqrt{2\cos 2a + 2}\,/\,2$.

Os valores dados por esta fórmula são os seguintes:

$$V_1 = 2\times 2/\sqrt{2} = 2{,}8284271247$$

$$V_2 = 2\times 2/\sqrt{2}\times 2/\sqrt{2+\sqrt{2}} = 3{,}0614674589$$

$$V_3 = 2\times 2/\sqrt{2}\times 2/\sqrt{2+\sqrt{2}}\times 2/\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 3{,}1214451522$$

$$V_4 = 3{,}1365484905$$

$$V_5 = 3{,}1403311569$$

$$V_6 = 3{,}1412772509$$

$$V_7 = 3{,}1415138011$$

À semelhança do método de Arquimedes, obtêm-se mais três algarismos exatos a cada cinco etapas. Verifica-se assim que a fórmula de Viète, na prática, é pouco útil pois converge muito lentamente (Boyer,1968; Delahaye, 1997).

No último quartel do séc. XVI, a Europa Ocidental tinha recuperado a maior parte das principais obras matemáticas da antiguidade conhecidas. Por outro lado, a matemática árabe fora perfeitamente apreendida e aperfeiçoada. Estavam criadas as condições para os progressos consideráveis que se realizaram no período seguinte: o nascimento e desenvolvimento do cálculo infinitesimal durante o século XVII, que permitiram uma evolução significativa na história de π. Da Renascença para o mundo moderno fez-se uma transição através de figuras importantes (Boyer, 1968), algumas fundamentais na evolução do conhecimento de π, que serão destacadas mais adiante.

2.1.6 No Tempo do Cálculo Infinitesimal

Far-se-á de seguida alusão aos trabalhos de Wallis (1616-1703), Gregory (1638-1675), Leibniz (1646-1716), Newton (1642-1727), Lambert (1728-1777) e Lindemann (1852-1939), matemáticos que são uma referência no período de transição para a Matemática Moderna.

O nascimento da análise moderna (cálculo diferencial e integral) proporciona a descoberta de novas definições de π, que se afastam da geometria. As fórmulas encontradas são doravante puramente aritméticas: produtos, somas ou frações contínuas. O desenvolvimento dessa via numérica conduziu a fórmulas mais eficazes, como as de arco tangente, ou outras também elas deduzidas a partir da análise, e que dominaram o cálculo de π até 1973. O π passou então a ser considerado, já não apenas como uma grandeza associada à geometria, mas sim como uma entidade numérica cuja natureza estava também relacionada com o cálculo infinitesimal (Delahaye, 1997).

Jonh Wallis, um dos fundadores da *Royal Society*, é nomeado professor em Oxford no ano de 1649 e publica as grandes obras matemáticas da Antiguidade. Uma das ações importantes de Wallis foi a sua contribuição para tornar a álgebra e a aritmética independentes das representações geométricas. Nessa época, a ligação entre números e geometria, uma herança da matemática grega, tal como o problema da quadratura do círculo, estava ainda presente na matemática. Thomas Hobbes (1588 -1679), um filósofo que se opunha às conceções de Wallis, publicou uma solução para o problema da quadratura do círculo na linha da matemática grega. Wallis mostrou que a solução de Hobbes era falsa, o que desencadeou uma polémica que durou mais de vinte anos (Jesseph, 2000).

Wallis tem contribuições importantes na trigonometria, no cálculo, na geometria analítica e nas séries. Contribuiu também para o desenvolvimento das notações matemáticas modernas; a ele se deve, em particular, os símbolos «<», «>» (para a comparação de números) e «∞» (para o infinito).

Os seus trabalhos sobre os produtos infinitos antecipam o cálculo infinitesimal de Newton e de Leibniz. Newton estudou cuidadosamente as obras de Wallis, sendo estas um elemento determinante para a sua formação.

Entre os seus resultados mais conhecidos está a fórmula de produto infinito que se apresenta a seguir, publicada em 1655 na sua obra *Arithmetica Infinitorum*:

$$\pi = 2\times\frac{2\times 2}{1\times 3}\times\frac{4\times 4}{3\times 5}\times\frac{6\times 6}{5\times 7}\ldots$$

Procedendo a algumas transformações algébricas, pode também escrever-se da seguinte forma:

$$\pi = 2\prod_{p=1}^{\infty}\frac{4p^2}{(2p-1)(2p+1)} = 2\prod_{p=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4p^2}\right)^{-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{4n}\times n!^4}{n(2n)!^2}$$

Para encontrar a fórmula, Wallis utilizou uma abordagem «algébrico-geométrica» que consiste em estudar a área de um quarto de círculo, cuja equação ele sabe que é $y^2 = 1 - x^2$ ou $y = \left(1-x^2\right)^{1/2}$. Deste modo, considera as áreas delimitadas pelas curvas $y = \left(1-x^2\right)^{h/2}$ para diferentes valores de *h*: usando o princípio da divisão em *pequenos retângulos* e, dado o seu perfeito conhecimento de somas do tipo $S_p = 1 + 2^p + 3^p + \ldots + n^p$, utilizou algumas propriedades das curvas correspondentes, o que lhe permitiu construir a sua fórmula.

É um trabalho que seria difícil justificar considerando os critérios de rigor atuais. Não obstante, foi ele que conduziu à magnífica fórmula de π como produto infinito.

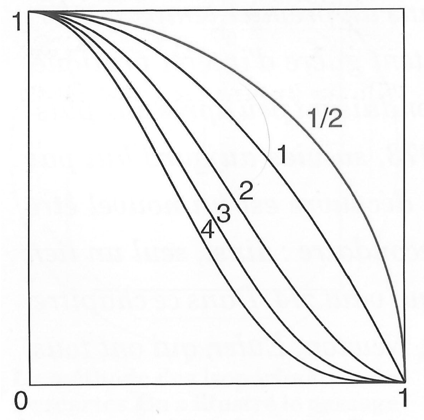


Fig.13 - Curvas da forma $y=\left(1-x^2\right)^h$ para diferentes valores de *h*, que Wallis utiliza para descobrir a fórmula de produto infinito. Para $h=1/2$, a curva é um arco de círculo.

Esta fórmula, considerada por alguns como possuidora de particular beleza, é a primeira fórmula infinita que representa π sem radicais (ao contrário da de Viète). Infelizmente, não permite grandes progressos no cálculo de π, como se pode ver pelos seguintes cálculos

$$2\times\frac{2\times 2}{1\times 3}\times\frac{4\times 4}{3\times 5}=2,8444444444$$

$$2\times\frac{2\times 2}{1\times 3}\times\frac{4\times 4}{3\times 5}\times\frac{6\times 6}{5\times 7}=2,9257142857$$

$$2\times\frac{2\times 2}{1\times 3}\times\frac{4\times 4}{3\times 5}\times\frac{6\times 6}{5\times 7}\times\frac{8\times 8}{7\times 9}=2,9721541950$$

$$2\times\frac{2\times 2}{1\times 3}\times\frac{4\times 4}{3\times 5}\times\frac{6\times 6}{5\times 7}\times\frac{8\times 8}{7\times 9}\times\frac{10\times 10}{9\times 11}=3,0021759545$$

$$2\times\frac{2\times 2}{1\times 3}\times\frac{4\times 4}{3\times 5}\times\frac{6\times 6}{5\times 7}\times\frac{8\times 8}{7\times 9}\ldots\frac{50\times 50}{49\times 51}=3,1260789002$$ (mais 20 fatores)

$$2\times\frac{2\times 2}{1\times 3}\times\frac{4\times 4}{3\times 5}\times\frac{6\times 6}{5\times 7}\times\frac{8\times 8}{7\times 9}\ldots\frac{500\times 500}{499\times 501}=3,1400238186$$ (mais 225 fatores)

$$2\times\frac{2\times 2}{1\times 3}\times\frac{4\times 4}{3\times 5}\times\frac{6\times 6}{5\times 7}\times\frac{8\times 8}{7\times 9}\ldots\frac{5000\times 5000}{4999\times 5001}=3,1414355935$$ (mais 20 250 fatores)

A convergência é particularmente lenta: para ter três algarismos inteiros exatos é necessário um número considerável de multiplicações (Boyer, 1968; Delahaye, 1997).

O matemático escocês James Gregory, professor da Universidade de Saint Andrews e na Universidade de Edimburgo, é conhecido em particular como o inventor do telescópio de reflexão, chamado *telescópio gregoriano*. Em 1667, tenta demonstrar, sem sucesso, que o problema da quadratura do círculo por meios algébricos é de impossível resolução; considera mesmo ter sido bem sucedido e publica uma demonstração que não convence nem Huygens (1629-1695) nem Leibniz. É de notar que, nessa época, a ideia de uma demonstração da impossibilidade da quadratura do círculo já era considerada (Boyer, 1968; Delahaye, 1997).

James Gregory descobriu a seguinte fórmula[10]:

$$arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$$

por um método que é interpretado nos dias de hoje considerando que $arctg(x)$ é uma primitiva de $\frac{1}{(1+x^2)}$, e dado o desenvolvimento em série:

$$\frac{1}{(1+x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$$

Esta fórmula foi a base para o cálculo de π durante vários séculos. De facto, para $x = 1$, obtém-se a série:

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right) = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Talvez porque compreendeu que era pouco útil para calcular π, Gregory não voltou a escrevê-la explicitamente. De facto, os cálculos seguintes permitem ilustrar a aproximação lenta a π :

$$4(1 - 1/3 + 1/5) = 3,4666666666$$

$$4(1 - 1/3 + 1/5 - 1/7) = 2,8952380952$$

$$4(1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11) = 2,9760461760$$

$$4(1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - \ldots + 1/101) = 3,1611986129$$

$$4(1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - \ldots + 1/1001) = 3,1435886595$$

$$4(1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - \ldots + 1/10001) = 3,1417926135$$

---

[10] Ficou conhecida como “série de Gregory”.

$$4(1-1/3+1/5-1/7+1/9-\ldots+1/100001)=3{,}1416126531$$

Esta convergência não é nada prática nem rápida. Trata-se de uma convergência logaritmica, na qual o número de etapas para obter um novo algarismo exato é cada vez maior.

A série de Gregory continuou a ser utilizada para o cálculo de π, mas com valores de x inferiores a 1, pois quanto mais próximo x está de 0 melhor é a convergência.

Gregory propõe também um método de cálculo iterado de π que, tal como o de Arquimedes, utiliza polígonos regulares de n lados, mas onde intervém a área em vez do perímetro. Considerando A_n e B_n as áreas dos polígonos regulares inscritos e circunscritos no círculo de raio 1, encontram-se as relações:

$$A_{2n}=\sqrt{A_nB_n} \qquad\qquad B_{2n}=\frac{2B_nA_{2n}}{(B_n+A_{2n})}$$

que conduzem a cálculos bastante mais eficazes que os da série de Gregory, mas não revelam melhores resultados que o próprio método de Arquimedes (Delahaye, 1997).

Gottfried Wilhelm Leibniz, matemático e filósofo é considerado, tal como Newton, um dos inventores do Cálculo Diferencial e Integral. Os escritos de Leibniz e os seus métodos, que continuam a ser estudados até aos dias de hoje, anteciparam vários aspetos do desenvolvimento da lógica e da filosofia da linguagem do século XX. Durante alguns anos, Leibniz esteve envolvido numa disputa com John Keill (1671-1721), Newton e outros, sobre a questão da invenção do Cálculo independentemente de Newton.

No Cálculo, Leibniz introduziu várias notações, como por exemplo o sinal de integral, $\int$, um símbolo sugestivo e conhecido de todos os que estudam integrais. Para além do seu trabalho no Cálculo Infinitesimal, Leibniz é por vezes considerado o primeiro cientista da teoria da informação (Davis, 2000). É também um inventor no campo das calculadoras mecânicas: melhora a calculadora decimal criada por Pascal cerca de 30 anos antes (a Pascalina) e inventa um dispositivo constituído por um carreto com dez "dentes", cada um dos quais mais comprido que o anterior, que permitia efetuar de modo automático a multiplicação e divisão, além da adição e subtração já conseguida pela Pascalina.

Ao trabalhar com séries infinitas, Leibniz não hesita a recorrer a passagens ao limite. Em 1674, propõe uma fórmula de π que parece ter sido Gregory o primeiro a descobrir.

Por transformações da série anterior, obtém uma segunda expressão:

$$\pi = 8\left(\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{5\times 7}+\frac{1}{9\times 11}+\cdots\right) = 8\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+1)(4k+3)}$$

$$\frac{\pi}{8} = \left(\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{5\times 7}+\frac{1}{9\times 11}+\cdots\right)$$

Que converge de forma ligeiramente mais rápida que a primeira, mas que não se verifica ser útil para o cálculo de π (Delahaye, 1997).

Isaac Newton, para além de ser um dos inventores do Cálculo, na forma do *cálculo das fluxões* (ao qual se chama hoje *cálculo diferencial*), é célebre pelos seus trabalhos fundamentais em física: a lei da atração universal (ou da gravitação), a ótica, as leis da mecânica.

No que diz respeito ao cálculo de π Newton usa uma nova e interessante fórmula. Partindo da fórmula binomial:

$$(1+x)^2 = 1+\binom{n}{1}x^1+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\cdots+x^n \qquad \text{com } \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

Ou seja,

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{2\times 3}x^3+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}x^p+..+x^n$$

Substituindo agora o inteiro n por um número a qualquer e considerando o prolongamento da fórmula até ao infinito:

$$(1+x)^a = 1+ax+\frac{a(a-1)}{2}x^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{2\times 3}x^3+\cdots+\frac{a(a-1)\cdots(a-p+1)}{p!}x^p+\cdots$$

Dado que a derivada de $\arcsin(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, deduz-se um desenvolvimento de $\arcsin(x)$ numa soma infinita:

$$\arcsin(x) = x + \frac{1}{2}\times\frac{x^3}{3} + \frac{1\times3}{2\times4}\times\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1\times3\times\ldots(2p-1)}{2\times4\times\ldots(2p)}\times\frac{x^{2p+1}}{2p+1} + \cdots$$

Para $x = \frac{1}{2}$, vem:

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6},$$

Obtendo-se assim a seguinte fórmula para π:

$$\pi = 6\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1\times3\times\cdots(2p-1)}{2\times4\times\cdots(2p)}\times\frac{1}{2p+1}\times\frac{1}{2^{2p+1}} + \cdots\right)$$

Esta fórmula converge rapidamente!

$$N_1 = 6\left(1/2 + 1/2\times1/3\times1/2^3\right) = 3{,}12500000000000000000$$

$$N_5 = 3{,}1415767157748664096320346320346320346 32$$

$$N_{10} = 3{,}1415926468755607960782237750788506670 18$$

$$N_{20} = 3{,}1415926535897907050470287149195787605 50$$

$$N_{50} = 3{,}1415926535897932384626433832795022862 55$$

Consegue-se novamente obter três algarismos em cinco etapas, tal como acontecia com o método dos polígonos de Arquimedes.

Utilizando um método análogo (Delahaye, 1997), Newton encontra outra expressão de π, mais complexa, mas que utiliza 22 termos, obtendo 16 decimais exatos de π:

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{5\times2^5} - \frac{1}{28\times2^7} - \frac{1}{72\times2^9} - \cdots\right)$$

Ou escrevendo de outra forma,

$$\pi = \frac{\sqrt{27}}{4} + 24\left(\frac{1}{3\times2^2} - \frac{1}{2\times5\times2^4} - \frac{1}{2\times4\times7\times2^6} - \cdots - \frac{1\times3\times\ldots(2p-1)}{2\times4\times\ldots(2p+2)}\times\frac{1}{2p+5}\times\frac{1}{2^{2p+4}} - \cdots\right)$$

Tal como em muitos outros casos, Newton não atribuiu grande importância ao resultado que só foi publicado postumamente.

O tratamento dos números reais usando processos infinitos não se limitou ao uso de séries. As frações contínuas foram um instrumento também muito utilizado. Mas, neste ponto, decidiu-se não explorar essa questão, pois o seu tratamento ultrapassa os objetivos da dissertação.

Já foi dito que os gregos se aperceberam da existência de segmentos geométricos cuja medida não correspondia a qualquer número (p. e. π e $\sqrt{2}$). A existência desses números está relacionada com a impossibilidade de fazer determinadas construções recorrendo unicamente a régua e compasso. Essa exigência grega, a de utilizar régua e compasso nas suas construções geométricas deu origem à definição de segmentos especiais, que correspondiam a números, chamados “construtíveis”, ou seja, aqueles que se podiam desenhar. Estes números são, ou racionais, ou irracionais algébricos. Por exemplo, $\sqrt{2}$, é incomensurável, e por isso irracional, mas é contrutível, ou seja, é algébrico. Por sua vez, o número π, sendo também irracional, não é construtível, ou seja, não é algébrico, mas sim transcendente.

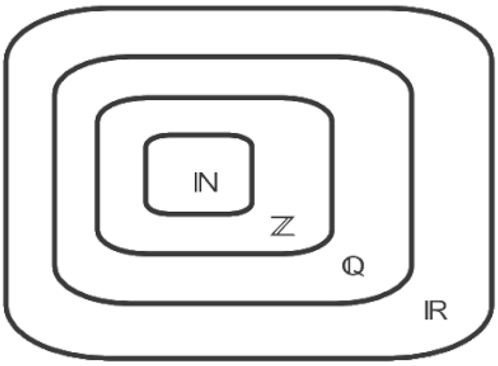


Fig.14

No ensino básico é habitual representar os conjuntos dos números usando diagramas como o da figura 14.

Os conjuntos N, Z e Q, contidos em R, são enumeráveis[11]. O conjunto dos irracionais algébricos é também enumerável, mas o conjunto dos transcendentes não o é. O número π é irracional e pertence à maioria não enumerável em que se englobam quase todos os números decimais. Lambert e Lindemann foram os matemáticos que definiram a natureza deste número.

Johann Heinrich Lambert é hoje conhecido por variadas contribuições na matemática. Uma delas é a primeira prova, apresentada à Academia de Berlim em 1761 (ou 1767?), de que π é um número irracional. Provou, usando frações contínuas, que se x for um número racional não nulo, então $tg(x)$ é irracional.

[11] Um conjunto X é enumerável se existir uma bijeção entre X e o conjuntos dos números naturais N.

Como $tg(\pi/4)=1$, um número racional, segue-se que $\pi/4$ tem de ser irracional, portanto π também. Isso não resolvia a questão da quadratura do círculo, pois irracionalidades quadráticas são construtíveis. Ora por essa época continuavam a aparecer inúmeros matemáticos amadores que pretendiam ter finalmente encontrado a quadratura do círculo. A existência desses numerosos quadradores de círculo fez com que a Academia das Ciências de Paris aprovasse, em 1775, uma resolução no sentido de não examinar oficialmente nenhuma pretensa solução de problema da quadratura.

Ferdinand von Lindemann provou que π é um número transcendente, isto é, não é solução de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros todos não nulos (como sucede com os números algébricos). Na sua demonstração, começou por mostrar que a fórmula $e^{ix}+1=0$ não pode ser satisfeita quando x é algébrico. Como Euler tinha mostrado que, para $x=\pi$ a equação é satisfeita, daqui se conclui que π não é algébrico. Com a demonstração de Lindemann conclui-se uma história com mais de 2000 anos, ficando definitivamente provada a impossibilidade da quadratura do círculo. Como π não é algébrico, o círculo não pode ser quadrado de acordo com as regras clássicas.

Parte II

Aplicação ao Ensino: Desafios sugeridos pela história

Basta que a alma demos,
com a mesma alegria,
ao que desconhecemos
e ao que é do dia a dia.
Sebastião da Gama

1) Desafios à Volta de Um Número

É aqui apresentado um conjunto de construções e de exercícios curiosos usados em várias épocas históricas e em diferentes culturas. A ideia que as une é sempre a mesma – a de tentar medir o círculo, ou seja, o seu comprimento ou a sua área. Algumas das figuras e das técnicas utilizadas foram escolhidas porque podem ser úteis nos vários níveis de ensino.

1.1 Algumas Aproximações Racionais

Ao longo dos tempos, foram surgindo muitas tentativas para calcular o valor exato de pi através, seja da retificação da circunferência, seja da quadratura do círculo. Mas de facto, o que se obtinha eram aproximações racionais. As construções geométricas que se seguem são exemplos dessas tentativas. As três primeiras foram escolhidas pela sua simplicidade. A quarta construção foi realizada por um matemático cujo percurso é singular, na história da matemática do seu tempo.

A construção com régua e compasso a partir da aproximação dos egípcios é apresentada na figura 15, e permite calcular π com um erro de 0,6%.

Muito mais tarde, no ano de 1685, Adam Kochansky (1631-1700) elabora uma construção usando a retificação da circunferência (figura 16), obtendo um valor de π com um erro inferior a $1{,}8 \times 10^{-5}$. Na figura 17 é apresentada a construção de Jacob de Gelder (1765-1848). Com este método, Gelder obtém o valor de π com um erro inferior a $8{,}5 \times 10^{-8}$.

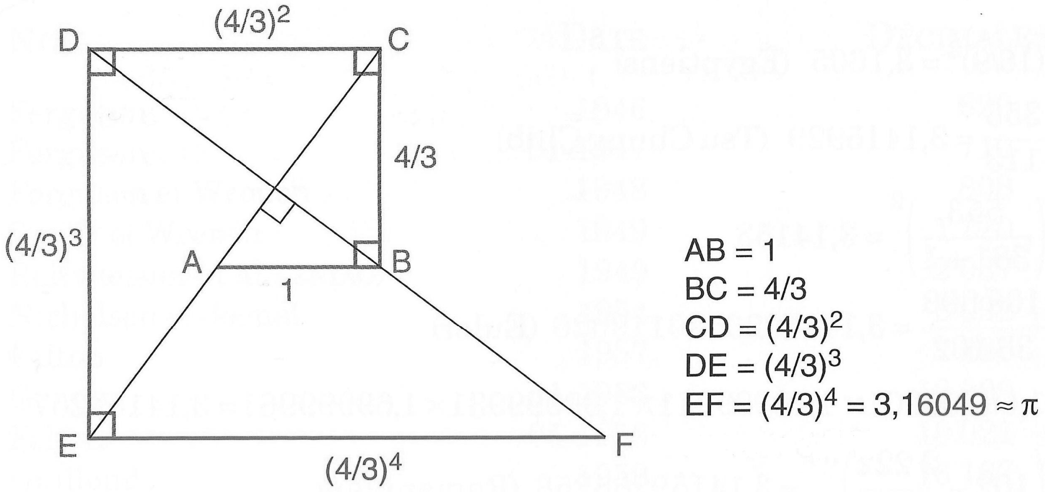


Fig.15 - Construção a partir da aproximação dos Egípcios.

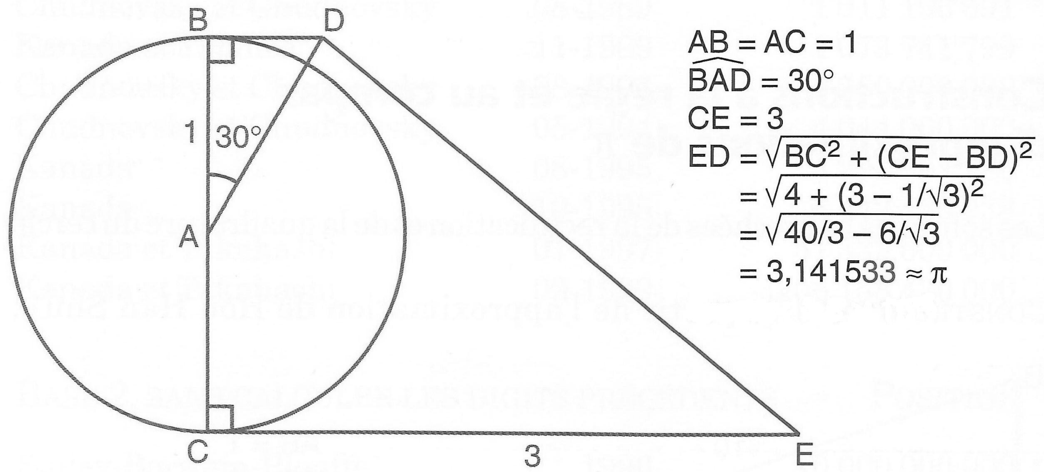


Fig.16 - Método de Kochansky – 1685.

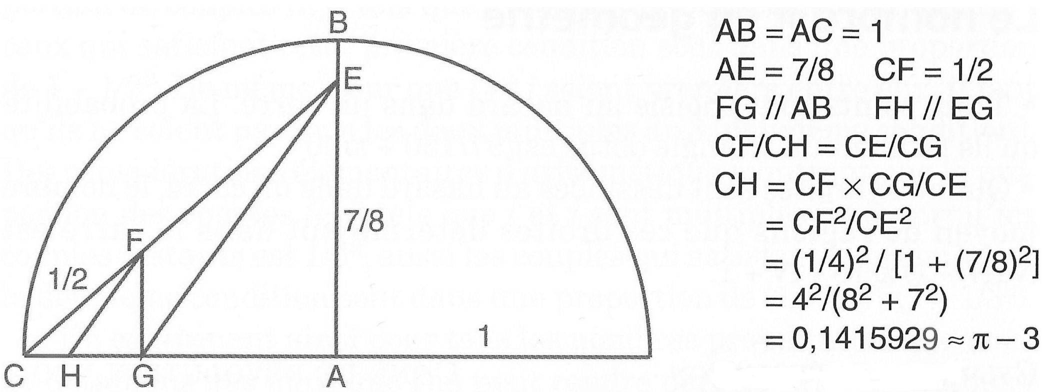


Fig.17 - Método de Jacob de Gelder – 1849.

A figura 18, que apresenta uma construção bem mais complexa do que as três primeiras, é da autoria do matemático indiano Srinivasa Ramanujan (1887-1920) que, sabendo obviamente da impossibilidade da quadratura, pretendia encontrar aproximações de π cada vez melhores. O seu trabalho, mais de 50 anos depois da sua morte, é associado a fórmulas descobertas depois de 1974. Proveniente de uma família muito pobre, a leitura de um compêndio de matemática praticamente sem demonstrações, despertou nele um profundo interesse pela descoberta da matemática. O matemático inglês, Godfrey Harold Hardy (1877-1947), a quem enviou manuscritos seus, interessou-se sobremaneira pelo seu trabalho autodidata. Hardy apoiou-o na sua vinda e estadia em Inglaterra, na obtenção de uma bolsa no *Trinity College* em Cambridge, e colaborou com ele na obtenção de resultados brilhantes em Teoria de Números[12].

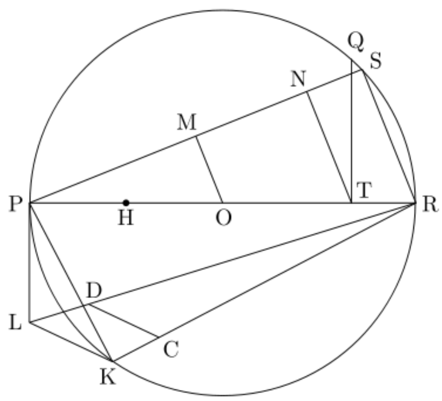


Fig.18 - Construção aproximada da quadratura do círculo de Ramanujan, com um erro de 7,2 x 10^{-12}.

1.2 Exercício Curioso A

Usando uma ideia de Fernand Lemay da Universidade Laval no Quebeque (Canadá) pode verificar-se experimentalmente que π está bastante próximo de $22/7$.

Graduar uma reta e tomar como unidade de medida o diâmetro do círculo. Marcar um ponto sobre o círculo e fazê-lo coincidir com o ponto 0 da reta. Após 7 voltas sobre a reta (sem deslizar) a marca ficará próxima do ponto 22.

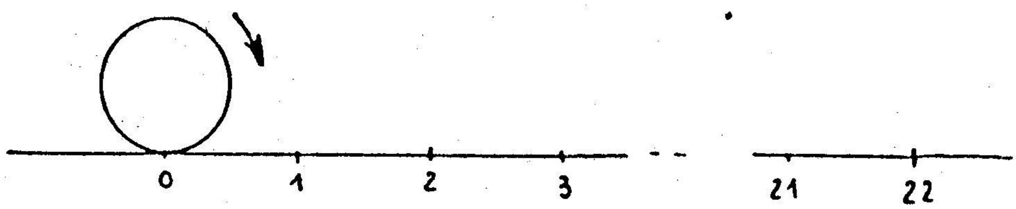


Fig.19 - Esquema do procedimento.

[12] Mais informação sobre a vida de Ramanujan pode ser consultada em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/4livros/ramanujan.htm

Uma roda de bicicleta e uma linha branca de campo desportivo podem ser úteis para o processo. Com uma moeda e uma folha de papel a experiência é possível mas mais delicada (Bouvier, 1986, p.242).

Um material que facilitaria o procedimento numa experiência em sala de aula seria, por exemplo, um carrinho de linhas, ou um cilindro de pequenas dimensões.

1.3 Exercício Curioso B - Explicações para a Fórmula Egípcia

Gaspar e Mauro (2004) apresentam explicações para a fórmula egípcia $A=\left[\left(\frac{8}{9}\right)D\right]^2$, encontradas em textos de história da matemática e de etnografia da matemática, baseadas em conhecimentos sobre a cultura egípcia, que "fornecem uma quantidade de materiais e métodos que podem ser utilizados em sala de aula na discussão do cálculo da área do círculo". Apresentam-se de seguida uma adaptação de duas delas.

Explicação I

O jogo de tabuleiro mancala – que significa "transferir" em árabe – considerado por muitos historiadores como o jogo mais velho do mundo é o nome genérico para mais de 200 jogos semelhantes entre si, originários do Antigo Egipto. Todos simbolizam a época da plantação e colheita e possuem de 3500 a 7000 anos. Tais jogos são muito populares em África e o seu objetivo é transferir as peças de uma das casas do tabuleiro para as outras até que todas fiquem vazias. Como peças utiliza-se sementes quase esféricas, seixos ou grãos.

Por se tratar de um jogo de estratégia seria natural que um dos participantes enquanto espera pelo fim da jogada do outro, brincasse com suas peças podendo, entre outras coisas, "formar", "transformar" e "contar" padrões geométricos.

Por exemplo, é possível construir com 10 peças circulares do jogo um triângulo equilátero e depois transformá-lo num retângulo (figura 20).

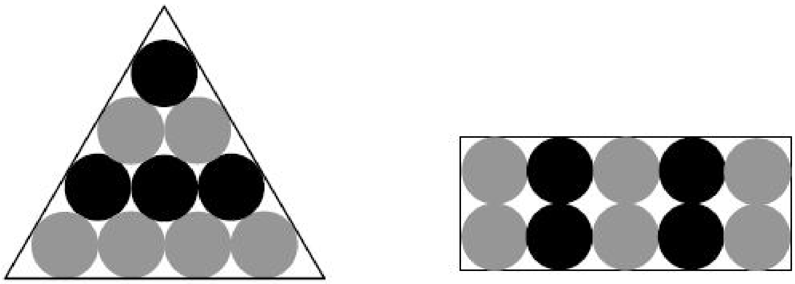


Fig.20

A área "aproximada" destas duas figuras seria a mesma.

É possível também "construir" círculos usando peças circulares do jogo (círculos menores) e, um modo simples de fazê-lo é construir anel por anel (figura 21).

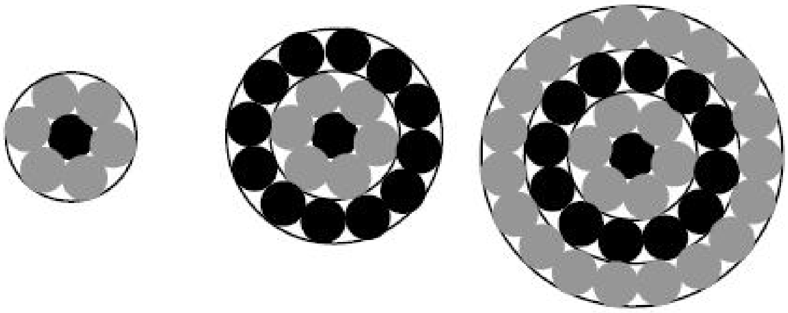


Fig.21

Sejam **D** o diâmetro do círculo maior e **d** o diâmetro do círculo menor.

Pode-se considerar **d** = 1. Assim, as áreas dos círculos da figura são respetivamente 7 e 19.

Usando o método acima descrito é possível construir novos círculos com o acréscimo de novos anéis.

A área de tais círculos figura no quadro 1.

D	Área do Círculo
1	1
3	1 + 6 = 7
5	1 + 6 + 12 =19
7	1 + 6 + 12 + 19 = 38
9	1 + 6 + 12 + 19 + 25 = 63
11	1 + 6 + 12 + 19 + 25 + 31 = 94

Quadro 1 - Área dos círculos construídos em função de D.

Se A(**D**) e A(**d**) são respetivamente as áreas dos círculos de diâmetro **D** e **d**, então observe-se que a área do círculo de diâmetro d=9 é igual a

$$(1+6+12+19+25) \text{ x } A(d) = 63 \text{ x } A(d)$$

Assim,

$$A(D=9) = 63 \text{ x } A(d) \cong 64 \text{ x } A(d).$$

Mas 64 é um quadrado perfeito

$$64 = 8^2$$

e é a área de um quadrado de lado 8. Portanto, é possível com os 64 círculos de diâmetro d=1 cobrir um quadrado de lado 8 (figura 22).

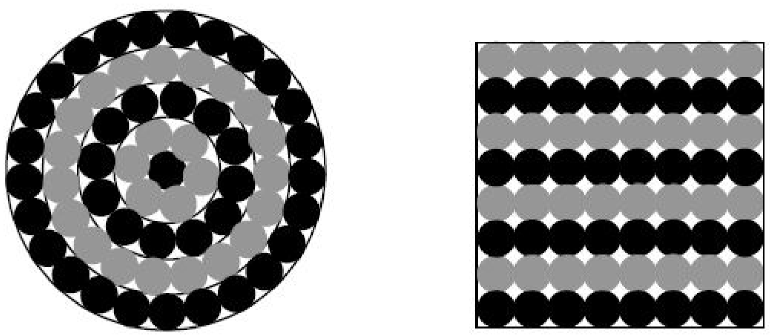


Fig.22

Logo,

$$A(D=9) = 64 = 8^2 = \ell^2$$

onde ℓ é o lado do quadrado.

$$\begin{matrix} \ell = 8 \\ D = 9 \end{matrix} \quad \rightarrow \frac{\ell}{D} = \frac{8}{9} \Leftrightarrow \ell = \frac{8}{9} D$$

$$A(D) = \ell^2 = \left(\frac{8}{9} D \right)^2$$

que corresponde à fórmula egípcia.

Explicação II

Curvas do tipo espirais são utilizadas em alguns países da África para simbolizar serpentes. Estas curvas são gravadas em portas de madeira e aparecem naturalmente como resultado final da construção de esteiras e cestos (figura 23).



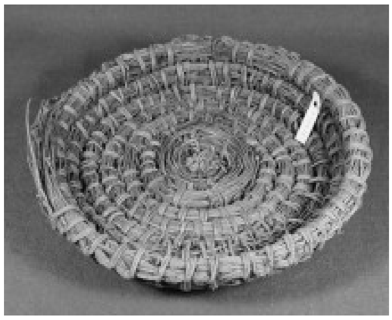


Fig.23 – Fotos de artesanato brasileiro e egípcio.

Este padrão espiral era um motivo comum na decoração de paredes de locais fúnebres. Aparece no formato do tabuleiro do “jogo serpente” do Antigo Egipto e do pão real[13].

O jogo Mehen, ou jogo da serpente, era um dos jogos de tabuleiro favoritos do Velho Reinado e é considerado, um dos mais antigos jogos de tabuleiro do mundo. Era jogado sobre um tabuleiro que tinha a figura de uma serpente enrolada com o corpo dividido em quadrados (figura 24).

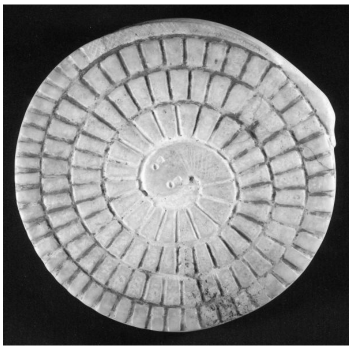


Fig.24 - Tabuleiro do jogo da serpente do Antigo Egipto.

Na construção de esteiras espirais de sisal aparece um formato semelhante ao do tabuleiro do “jogo da serpente”. O processo de construção dessas esteiras sugere um outro modo para explicar a fórmula egípcia para o cálculo da área do círculo.

Este processo consiste em enrolar a corda em torno de um ponto fixo e costurar ao longo das espirais determinadas pelas laterais da corda. A extremidade final da tira é cortada e costurada de modo a dar à esteira a forma de um círculo (figura 23).

Supondo que os antigos egípcios sabiam fazer esteiras semelhantes, e que uma corda de sisal pode ser considerada como um retângulo, a área do círculo

[13] No Antigo Egipto, os faraós tinham a sua própria padaria, a padaria real, a qual era até enterrada com eles aquando a sua morte.

construído utilizando uma corda de sisal pode ser calculada como a área de um retângulo cujas dimensões lineares são o comprimento e largura da corda.

Pode considerar-se como unidade de medida a largura da corda. Seja ℓ o comprimento da corda necessária para construir um círculo de diâmetro **D**.

O quadro a seguir (quadro 2) fornece o comprimento da corda (ℓ) e o diâmetro do círculo (**D**) em função do número de voltas completas (**V**) dadas pela corda. Pode ser verificada experimentalmente (figura 25).

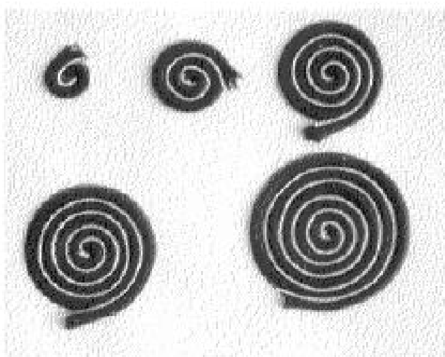


Fig.25

V	2	3	4	5	6
ℓ	7	20	39	64	95
D	3	5	7	9	11

Quadro 2

Observando os resultados obtidos, vemos que, para D = 9, a área do círculo de diâmetro **D** é $\boldsymbol{A} = 64 = 8^2$. Isto é, a área do círculo de diâmetro **D** é igual a área de um quadrado de lado $n = 8$.

Assim, temos:

$$\begin{matrix} D = 9 \\ n = 8 \end{matrix} \;\rightarrow\; \frac{n}{D} = \frac{8}{9} \;\rightarrow\; A = \ell = n^2 = \left(\frac{8}{9}D\right)^2$$

que corresponde à fórmula egípcia.

Estes exemplos podem justificar que, no papiro de Rhind, o escriba tenha escolhido o valor D = 9 para resolver o problema do cálculo da área do círculo.

Para utilizar esta técnica no ensino, as tiras de sisal utilizadas pelos africanos podem ser substituídas por outros materiais encontrados facilmente em cada região do país, como por exemplo cordas de sisal, de nylon, de algodão, etc.

Materiais concretos podem ser criados para facilitar aos alunos a construção da espiral e a medição do comprimento das tiras.

1.4 Exercício Curioso C

Na figura 26 está representado um quarto crescente formado por dois arcos de circunferência. A tarefa consiste em desenhar um emblema da Cruz Vermelha cuja área seja geometricamente igual à do quarto crescente.

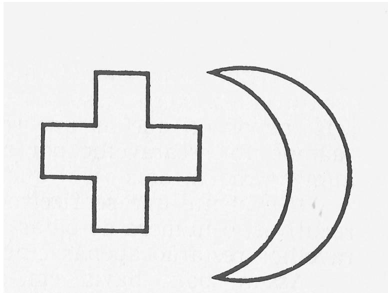


Fig.26

Quem já tenha ouvido falar da impossibilidade de resolver a quadratura do círculo, o mais certo é julgar que do ponto de vista estritamente geométrico, o problema proposto também é insolúvel. Em virtude de não ser possível transformar um círculo num quadrado de área equivalente, muitos pensarão que também não é possível transformar uma lúnula numa figura de forma retangular. De facto, a quadratura das lúnulas é possível e é conhecida desde a Antiguidade, como mencionado no ponto I.2.

Este problema pode resolver-se por meio de processos geométricos, se aplicarmos uma dedução curiosa do teorema de Pitágoras, segundo a qual a soma das áreas dos semicírculos construídos sobre os catetos é igual à do semicírculo construído sobre a hipotenusa (figura 28), vemos que a área – soma das áreas das lúnulas resultantes – é igual à área do triângulo. E considerarmos um triângulo isósceles, cada lúnula será igual a metade de tal triângulo (figura 29).

Daqui se deduz que é possível construir geometricamente com rigor um triângulo

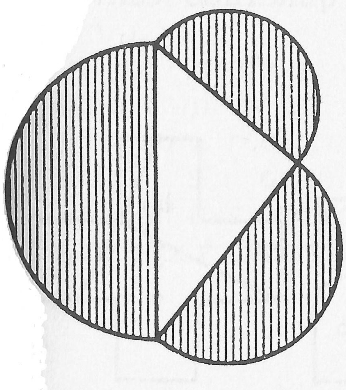


Fig.27

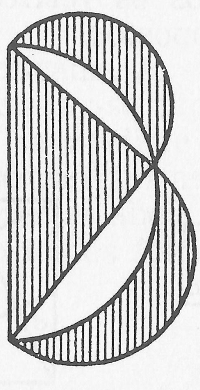


Fig.28

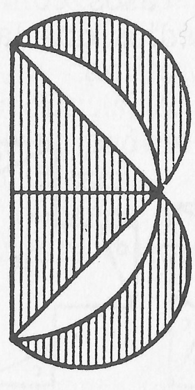


Fig.29

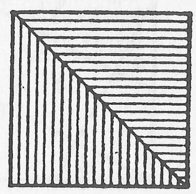


Fig.30

isósceles retângulo, cuja área é equivalente à do quarto crescente.

Uma vez que um triângulo isósceles retângulo pode transformar-se num quadrado de área idêntica (figura 30), também o nosso quarto crescente pode substituir-se, por processos puramente geométricos, por um quadrado de igual área.

Resta-nos apenas transformar este quadrado no emblema da cruz vermelha com área equivalente (que consta, como sabemos, de cinco quadrados iguais unidos uns aos outros de forma conveniente). Existem vários modos de realizar esta transformação. Indicam-se dois deles nas figuras 31 e 32. Em ambos os casos começamos os vértices do quadrado com os pontos médios dos lados opostos.

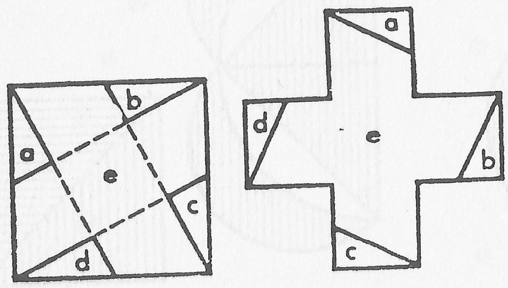


Fig.31

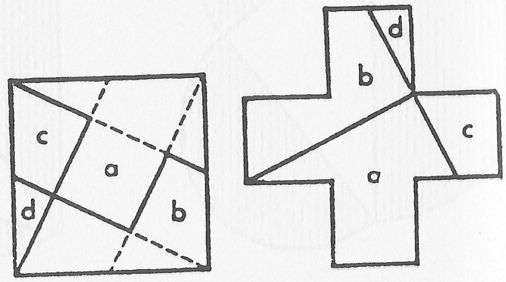


Fig.32

Nota importante: Um quarto crescente só poderá converter-se numa cruz de área equivalente quando aquele for formado por dois arcos de circunferência interior correspondente a um raio maior[14].

Vejamos agora o modo de construir uma cruz de área equivalente à de um quarto crescente. Unimos os extremos A e B do quarto crescente (figura 33) por um segmento de reta. Do ponto médio O deste segmento parte uma perpendicular de comprimento OC igual AO. O triângulo isósceles OAC completa-se de modo a formar o quadrado OADC, o qual se transforma numa cruz por um dos processos indicados nas figuras 31 e 32 (Adaptado de Parelman, 1968).

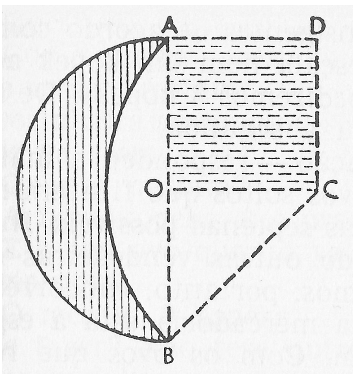


Fig. 33 Obtenção da área

[14] O quarto crescente que vemos no céu tem uma forma um pouco diferente: o seu arco exterior é semicircular e o seu interior semi-elíptico. Os pintores desenham frequentemente o quarto crescente como se fosse formado por dois arcos de circunferência, o que é incorreto (Parelman).

2) O Presente, no Ensino

Atualmente, no Ensino Básico, a definição de π surge no 5º ano, integrada no tema matemático Geometria, nos tópicos Perímetros e Áreas.

Os objetivos específicos associados são os seguintes:	**Nas notas recomenda-se que se deverá:**	**Estratégias:**
- Determinar um valor aproximado de π.	- Propor a determinação experimental de um valor aproximado de π.	Tarefa de medição de perímetros e diâmetros de vários objetos com forma circular, aplicando $\frac{Perímetro(P)}{Diâmetro(D)}$ para determinar o valor aproximado de π. Partir para $P = \pi \times D$ e $P = 2 \times \pi \times r$.
- Resolver problemas envolvendo perímetros de polígonos e do círculo.	- Usar situações experimentais para encontrar a fórmula do perímetro do círculo.	
- Determinar valores aproximados da área de um círculo desenhado em papel quadriculado.	- Usar figuras e respetivo enquadramento em papel quadriculado.	Tarefas experimentais utilizando, por exemplo, papel quadriculado, ou procedendo a dobragem de círculos de papel, ou transformando círculos de cartolina em rombóides, para chegar a $A_{círculo} = \pi \times r^2$.
- Resolver problemas que envolvam áreas do triângulo e do círculo, bem como a decomposição e composição de outras figuras planas.	- Usar situações experimentais, para determinar a fórmula da área do círculo.	

Quadro 3

Relativamente ao 2º ciclo, nas indicações metodológicas do Programa de Matemática do Ensino Básico é mencionado que “dado que a Geometria e a

Medida estão diretamente relacionadas com as atividades matemáticas mais antigas em que o ser humano se envolveu, o seu estudo possibilita a exploração de aspetos históricos (a Matemática como atividade de resolução de problemas práticos em algumas civilizações e também como atividade predominantemente intelectual, para os Gregos)“. Explora-se neste trabalho também a ideia recíproca, de que as dificuldades, evoluções e conhecimentos da história da matemática servem de base para o desenvolvimento e exploração dos conceitos matemáticos, neste caso particular, no trabalho do conceito de número irracional. O conhecimento das dificuldades sentidas pelos matemáticos da Antiguidade poderá ser aproveitado pelos alunos durante a construção do seu conhecimento. Por outro lado essas dificuldades têm potencialidade para serem utilizadas pelos professores em tarefas ou esclarecimentos.

A utilização da história assume-se como vantajosa para a introdução da definição de π, bem como da exploração de conceitos matemáticos em que este número está envolvido. Com alunos na faixa etária do 2º ciclo do ensino básico, a associação à geometria e as propostas de tarefas de caráter experimental, em que são relacionados conceitos de um modo bastante intuitivo, poderão ser facilitadoras do processo ensino/aprendizagem.

A verificação de que existe uma relação constante entre o perímetro (ou área) e o raio em todos os círculos pode tornar-se intuitiva se for efetuada com o apoio de atividades experimentais.
Proporciona-se também o desenvolvimento da ideia de que os valores obtidos para π são aproximações, algumas das quais poderão ser ou não consideradas aceitáveis, consoante o contexto da aplicação. É também útil do ponto de vista didático ensinar que existem matemáticos que pretendem conhecer melhores aproximações e refletir com os alunos sobre as suas motivações.

No decorrer do trabalho com os alunos, a ideia de que o número π é uma dízima infinita não periódica e que, por isso, pertence a um conjunto numérico diferente dos estudados até então, serve como base para o trabalho posterior no 3º ciclo do ensino básico, no qual π está associado à aritmética.

No 3º ciclo, o trabalho com o número π surge já integrado no tema matemático Números e Operações. Assim “o estudo dos números e operações é alargado, considerando-se os números inteiros e os números racionais, positivos e negativos, e introduzindo-se os números irracionais de modo a chegar ao conjunto dos números reais" (Programa de Matemática do Ensino Básico, 2007, p. 48).

Nas indicações metodológicas, chama-se a atenção para que se deverá discutir com os alunos alguns casos de irracionalidade, sendo que "o caso de π, pela sua relevância matemática e histórica, merece igualmente uma referência especial". No Programa é dito explicitamente que "os números reais também podem ser vistos como medidas de grandezas" e que "o problema histórico dos incomensuráveis entre os pitagóricos permite perspetivar os números irracionais como grandezas incomensuráveis. Assim, a diagonal de um quadrado é incomensurável com o seu lado tomado como unidade (ou seja, $\sqrt{2}$ é irracional) e a medida do perímetro do círculo é incomensurável com o seu diâmetro tomado como unidade (ou seja, π é irracional)". Sugere-se até que " os alunos com melhor desempenho matemático podem analisar uma demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$" (Programa de Matemática do Ensino Básico, 2007, p. 49).

3) A Experiência Realizada

A atividade apresentada de seguida foi elaborada de forma a usar as potencialidades da história da matemática no ensino destinado aos alunos do 5º ano do Ensino Básico. A oportunidade dessa utilização foi, aliás, propiciada pelas orientações do Ministério da Educação e Ciência que, desde há alguns anos, recomendam o uso da história no ensino da matemática.

Pretendeu-se que fosse uma tarefa totalmente realizada pelos alunos e onde fossem utilizados materiais simples do dia a dia, aos quais eles tivessem fácil acesso. Para além de facultar uma simples visualização, esta experiência didática teve a intenção de contribuir para o desenvolvimento, nos alunos, de uma visão diferente da disciplina, através da sua própria participação na atividade proposta.

A fim de facilitar a utilização desta atividade, foi construída uma orientação para o professor, bem como uma ficha de trabalho e uma folha de registos para apoiar os alunos no seu trabalho.

A experiência foi realizada em duas turmas, bastante diferentes no que diz respeito ao contexto de aprendizagem, a Turma D e a Turma A. Apresentam-se nesta ordem por ter sido aquela pela qual se desenvolveram os trabalhos.

É de ressalvar que na Turma D não ocorreu nenhuma aula prévia, servindo esta tarefa como “introdução exploratória” da questão, ao passo que a Turma A já tinha tido aulas com a sua professora da disciplina de Matemática, em que estes conteúdos haviam já sido trabalhados.

Como referido na orientação para o professor, o tempo previsto foi uma aula de 90 minutos, com possível prolongamento.

Atividade: **RELAÇÃO ENTRE O PERÍMETRO E O DIÂMETRO DO CÍRCULO**

O número pi (representado habitualmente pela letra grega π) é o irracional mais famoso da história, com o qual se representa a razão constante entre o perímetro de qualquer circunferência e o seu diâmetro.

A existência de uma relação constante entre a circunferência de um círculo e o seu diâmetro era conhecida por muitas das civilizações antigas. Tanto os Babilónios como os Egípcios sabiam que esta razão era maior que 3.

Embora muitas civilizações antigas tenham observado através de medições que a razão do círculo é a mesma para círculos de diferentes tamanhos, os Gregos foram os primeiros que explicaram porquê. É uma simples propriedade das figuras semelhantes. Os antigos Gregos foram provavelmente os primeiros a compreender que π e $\sqrt{2}$ são números muito diferente dos números inteiros ou dos números racionais (razão de inteiros) que eles usavam nas suas matemáticas.

Objetivo da atividade:

Determinar experimentalmente um valor aproximado de π

Usar situações experimentais que ajudarão a encontrar a fórmula do perímetro do círculo

Recursos:

- Ficha de trabalho
- Folha de registos
- Compasso
- Lápis e borracha
- Régua
- Cordel
- Materiais variados de utilização quotidiana com forma circular
- Fita métrica

Modalidade de trabalho: Grupos de 3/4 alunos.

Duração da tarefa:

Uma aula de 90 minutos com possível prolongamento para parte da aula seguinte, sendo o ponto de partida para a exploração de conteúdos presentes no manual escolar, nomeadamente a fórmula do perímetro do círculo.

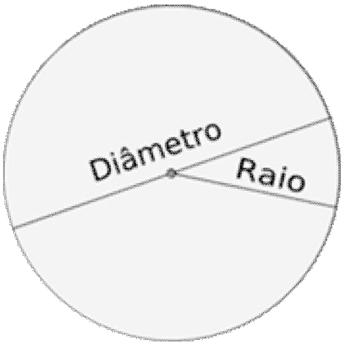
MATEMÁTICA

------ RELAÇÃO ENTRE O PERÍMETRO E O DIÂMETRO DO CÍRCULO ------

Relembra o que já estudámos sobre o círculo:

Perímetro – comprimento da linha que delimita a figura.

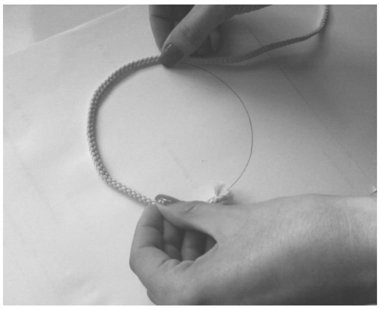
Diâmetro – segmento de reta definido por quaisquer dois pontos da circunferência e que passa pelo centro.

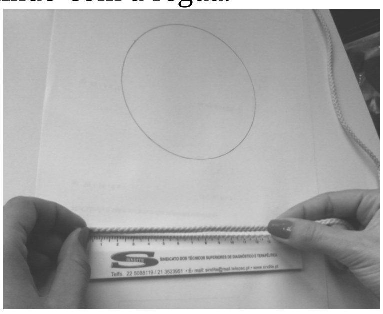


1. Com o compasso traça as seguintes circunferências na folha que te foi dada:

a) raio = 0,5 cm / diâmetro = 1cm
b) raio = 1cm / diâmetro = 2cm
c) raio = 2cm / diâmetro = 4cm
d) raio = 3cm / diâmetro = 6cm

2. Depois de traçadas as circunferências, utiliza o cordel para medir os perímetros, sobrepondo-o sobre a circunferência e medindo com a régua.





2.1. Regista aqui as tuas medições e faz descobertas…

	Medida do Diâmetro	Medida do Raio	Medida do Perímetro	Perímetro : Diâmetro
a)				
b)				
c)				
d)				

2.2. Para cada círculo, quantas vezes (mais ou menos) cabe a medida do diâmetro dentro da medida do perímetro? ____

2.3. Em qualquer circunferência, se dividirmos o perímetro pelo diâmetro obtemos sempre o mesmo número. Podemos verificá-lo nos exemplos escolhidos (aproximadamente, por causa da imprecisão da medida). Para o fazer procede da seguinte forma:

2.3.1. Determina as razões entre os seguintes diâmetros considerados:

$\frac{b)}{a)} = - =$ $\qquad$ $\frac{c)}{a)} = - =$ $\qquad$ $\frac{d)}{a)} = - =$

2.3.2. Determina também as razões dos respetivos perímetros que mediste para os mesmos casos:

$\frac{b)}{a)} = - =$ $\qquad$ $\frac{c)}{a)} = - =$ $\qquad$ $\frac{d)}{a)} = - =$

Que valores obténs? _________________________________

2.4. O número que obtiveste dividindo a medida do perímetro pela medida do diâmetro é um valor aproximado de um número a que se dá o nome de "pi" e representa-se pelo símbolo π .

Completa os espaços para registares entre que valores se deverá encontrar o número π (enquadramento).

_______ $< \pi <$ _______

2.5. Agora escolhe alguns objetos e mede com a fita métrica

Objeto	**Medida do Diâmetro**	**Medida do Perímetro**	**Perímetro : Diâmetro**

Os valores obtidos na última coluna são semelhantes aos obtidos na tabela anterior? ______

O número π é uma **dízima infinita não periódica**, e por isso pertence a um conjunto de números chamados **irracionais**.
O seu desenvolvimento decimal começa assim:

3,1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510…

------ RELAÇÃO ENTRE O PERÍMETRO E O DIÂMETRO DO CÍRCULO ------

Folha de Registos

a)

b)

c)

d)

Turma D

<table>
<tr><td>Duração da Atividade</td><td colspan="3">O tempo previsto para a execução de toda a atividade teve como base o conhecimento do ritmo de trabalho da turma e as suas características, como por exemplo o número de alunos da turma, as suas dificuldades de concentração e compreensão.
Assim, o tempo utilizado para organizar os alunos nos lugares em grupos de trabalho, introduzir e explicar a atividade, e todos os grupos concluírem o exercício 1 ocupou quase a totalidade da aula de 90 minutos. Não obstante, metade dos grupos iniciou ou concluiu o exercício 2.
Foi utilizada a totalidade da aula seguinte (90 minutos) e alguns grupos não finalizaram convenientemente a atividade. Para tal, poder-se-ão apontar algumas razões:
- a distração;
- as dificuldades no exercício 1, que comprometeram a utilização do tempo disponível;
- alguns alunos faltaram à segunda aula.</td></tr>
<tr><td>Compreensão das Tarefas</td><td colspan="3">De um modo geral entenderam as tarefas.
Além da explicação inicial, fui explicando o pretendido para cada exercício, antes deste ser iniciado, bem como acompanhei os grupos e esclareci dúvidas mais particulares à medida que eram colocadas. Os exercícios que suscitaram mais dúvidas de compreensão do enunciado foram o 2.2. e o 2.3..
Para ajudar na compreensão do enunciado 2.2. recorri a um exemplo concreto que apresentava aos grupos. Cortava um pedaço de cordel com a medida do perímetro de uma circunferência e outro com a medida do diâmetro da mesma circunferência, para verificarem que poderiam caber três destes cordéis (diâmetro) dentro do primeiro (perímetro).
Para a realização do exercício 2.3. bastou dar o exemplo para o primeiro ponto do 2.3.1..
Porém, não me parece que algum dos alunos tenha efetivamente atingido o seu objetivo. O conceito de razão não está ainda adquirido, pelo que talvez nem depois da discussão em grande grupo tenha ficado bem estabelecido que, para duas circunferências dadas, a razão entre os seus diâmetros e perímetros é a mesma.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Execução das Tarefas</td><td>A- Construção das circunferências (ex.1)</td><td>B – Medição do perímetro (ex. 2.1.)</td><td>C – Medição do perímetro (P) e do diâmetro (D) dos objetos escolhidos e obtenção da razão P:D (ex. 2.5.)</td></tr>
<tr><td>A maioria dos alunos construiu as circunferências mas verificou-se pouco rigor no traço e na medida. A qualidade dos materiais/estado de conservação não era aceitável e notou-se que muitos alunos apresentam dificuldades em manipular o compasso.
Houve dificuldades na construção da primeira circunferência (diâmetro de 1cm) pois a abertura do compasso é reduzida, o que dificultou a construção. A finalização do exercício foi demorada pois os alunos não queriam deixar a alínea a) por fazer.</td><td>Foi bem executado, apesar do eventual pouco rigor da construção das circunferências influenciar esta medição.
Aconselhei os elementos dos grupos para a entreajuda para facilitar estas medições.</td><td>Dos 24 alunos, 16 realizaram o exercício.
Destes, 2 apresentaram todas as razões com valores razoáveis (8%), 5 alguma (21%), e 9 nenhuma (38%).

Averiguando causas para valores pouco razoáveis, verifiquei que alguns não dividiram os valores corretamente (trocando dividendo com divisor), não mediram corretamente o diâmetro, ou escolheram objetos pouco adequados.

É curioso como as medições de alguns alunos levaram à obtenção de todas as razões com valor 2.</td></tr>
</table>

Quadro 4

Turma A

<table>
<tr><td>Duração da Atividade</td><td colspan="3">A atividade foi executada no tempo previsto. A organização dos grupos de trabalho foi rápida e ordeira.
Nos 90 minutos iniciais os grupos realizaram quase a totalidade dos exercícios.
De uma forma global, os alunos desta turma possuem hábitos e métodos de trabalho, pelo que por exemplo, na primeira tarefa traçaram as circunferências com relativa facilidade. Para tal também contribuiu o facto de os materiais utilizados serem de boa qualidade e estarem em bom estado de conservação, bem como a minha indicação de que não deveriam ter muita preocupação com o rigor da circunferência de 1cm de diâmetro (já tinha verificado a dificuldade da outra turma e o tempo gasto nesta alínea). As três alíneas seguintes são suficientes para identificar o valor aproximado da razão.
Parte da aula seguinte foi utilizada para finalizar alguns pontos mas, basicamente, discutiram-se os resultados e as conclusões.</td></tr>
<tr><td>Compreensão das Tarefas</td><td colspan="3">Compreenderam as tarefas com alguma facilidade. À semelhança da outra turma, procedi a uma explicação inicial. A maioria dos grupos prosseguia para o exercício seguinte sem ser necessária indicação para tal e solicitavam a minha presença quando surgiam dúvidas.
À semelhança da outra turma, os exercícios que suscitaram mais dúvidas de compreensão do enunciado foram o 2.2. e o 2.3.. Utilizei as mesmas estratégias de esclarecimento.
Para ajudar na compreensão do enunciado 2.2. recorri a um exemplo concreto que apresentava aos grupos. Cortava um pedaço de cordel com a medida do perímetro de uma circunferência e outro com a medida do diâmetro da mesma circunferência, para verificarem que poderiam caber três destes cordéis (diâmetro) dentro do primeiro (perímetro).
Para a realização do exercício 2.3. bastou dar o exemplo para o primeiro ponto do 2.3.1..
Apenas alguns (poucos) deverão ter apreendido o objetivo desta tarefa.
O conceito de razão não está ainda adquirido, pelo que talvez nem depois da discussão em grande grupo tenha ficado bem estabelecido que, para duas circunferências dadas, a razão entre os seus diâmetros e perímetros é a mesma.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Execução das Tarefas</td><td>A- Construção das circunferências (ex.1)</td><td>B – Medição do perímetro (ex. 2.1.)</td><td>C – Medição do perímetro (P) e do diâmetro (D) dos objetos escolhidos e obtenção da razão P:D (ex. 2.5.)</td></tr>
<tr><td>Salvo a dificuldade no rigor da circunferência de 1cm de diâmetro, a maioria traçou as circunferências com relativa rapidez e um rigor aceitável para o ano de escolaridade.
Alguns consideraram necessário assinalar com o lápis o centro das circunferências (poderia ser interessante explorar isto numa aula).</td><td>Foi bem executado mas parece-me que poderiam ter obtido valores mais precisos se os elementos dos grupos se ajudassem mais na sobreposição do cordel (como aconselhei), em vez de cada um querer fazer as suas próprias medições.</td><td>Foram bastante criativos na escolha dos objetos (tiveram a oportunidade de sair da sala de aula). Porém, alguns objetos não foram a escolha mais adequada.
De qualquer forma, os valores pouco razoáveis obtidos foram devidos, na sua maioria, por troca da ordem dividendo-divisor. No entusiasmo das medições não tiveram isso em conta.

Dos 21 alunos, 19 realizaram o exercício.
Destes, 4 apresentaram todas as razões com valores razoáveis (19%), 11 alguma (52%), e 4 nenhuma (19%).</td></tr>
</table>

Quadro 5

3.1 Avaliação dos Resultados

Conhecimento Experimental – Vantagens e Inconvenientes

Dada a dificuldade em explicar aos alunos desta idade a natureza do número pi é também difícil avaliar os resultados da experiência proposta em termos de conhecimento matemático. De qualquer forma, a sua finalidade não era, evidentemente, a de fazer perceber o que é um número irracional. Ela era bem mais modesta e, do ponto de vista da história da matemática, podemos situá-la na Antiguidade, ou melhor, nas civilizações Egípcia e Babilónica, onde se sabia já que havia uma razão constante entre perímetro e diâmetro. Essa ideia, que podemos considerar já abstrata e complexa, é ensinada em geral no 5ºano de escolaridade apenas "teoricamente" e com o rigor necessário à idade dos alunos. A experiência em questão não melhora a eficácia nem o rigor desse conhecimento, apenas transforma a maneira como ele é comunicado. Sendo assim, a eficácia da aprendizagem associada ao π não pode ser verificada objetivamente com esta atividade; apenas se farão algumas observações sobre a forma como a experiência funcionou, em particular do ponto de vista do rigor. Far-se-ão também algumas considerações sobre o desenvolvimento do trabalho, e depois, a partir da análise dos registos efetuados pelos alunos.

O que, de facto, se pretende é que tenham um conhecimento experimental desta realidade, de que P/D tem sempre o mesmo valor, mesmo não verificando de forma rigorosa, mas experimentando e podendo observar que os valores obtidos são diferentes mas, ainda assim, próximos do valor de π. E relativamente à questão dos valores rigorosos e aproximados, o professor desempenha um papel fundamental para suscitar a discussão e deixar claro que se obtém um número que é, porém, difícil de obter procedendo desta forma.

3.1.1 A ideia de que P/D tem sempre o mesmo valor

Um dos objetivos pretendidos neste estudo experimental é o de adquirir a noção de que, ao medir P/D, se obtém aproximadamente o mesmo valor e que esse valor é próximo de 3,14.

Na turma D, parece-me que esta ideia ficou bem estabelecida, apoiando-me na verificação do seu desempenho no decorrer da atividade e também na continuidade das aulas de Matemática, em que posteriormente se passou para a fórmula do perímetro do círculo.

Não obstante, e por se tratar de conteúdos trabalhados quase no final do ano letivo, em que a pressão para o cumprimento do extenso programa é uma realidade, e a motivação/concentração da turma está numa fase decrescente, poderei considerar que a aplicação direta de que o valor de π é $P \div D$ e de que os três primeiros algarismos são 3,14 ficaram adquiridos pela maioria dos alunos, mas que as posteriores respostas a questões em que terão que obter uns valores a partir de outros dados, poucos conseguiram (não esquecendo nunca as dificuldades destes alunos no que ao raciocínio matemático diz respeito).

Também a ideia de que este é um número "diferente" dos que têm conhecido até então deverá ter ficado estabelecida, e muito saberão inclusive que pertence ao conjunto de números chamados "Irracionais".

Não fui professora da turma A na disciplina de Matemática, pelo que terei que aferir com base apenas na atividade, considerando os registos e a participação oral na realização das tarefas e na discussão em grande grupo.

Assim, e tendo também em conta que nas aulas de Matemática este conteúdo havia já sido abordado, parece-me que a maioria dos alunos da turma ficou sensibilizada para os conteúdos e poderá com alguma facilidade mobilizar estes conceitos no ano letivo seguinte, no qual continuarão a ser explorados, na disciplina de Matemática.

3.1.2 O Problema Prático da Medição

No exercício 2.5., como consequência de algumas escolhas de objetos com formas não facilitadoras de medições como, por exemplo, o estojo em forma de cilindro mas que se deformava por ser feito de tecido, ou materiais sem formas rigorosamente circulares, surgiram valores de medições de perímetros e diâmetros que não se enquadravam na razão pretendida, pelo que os alunos responderam que os valores obtidos na última coluna não eram semelhantes aos obtidos na tabela anterior. Observei nas suas fichas de trabalho que alguns dos alunos aos quais isso sucedeu escreveram “não” mas apagaram e escreveram “sim”, provavelmente por terem verificado que durante a discussão final em grande grupo era suposto terem obtido valores semelhantes. Alguns exemplos desses objetos são: corretor, caneta, lápis, estojo, calculadora, rolo do cordel, garrafa de água, balde, cabo da vassoura…

Considerando as medições de objetos passíveis de proporcionar as razões pretendidas, verifica-se que algumas foram mal executadas, revelando que existem alunos que não têm bem adquirida a habilidade/competência de medir.

Dos alunos que efetuaram medições (36 alunos), 9 mediram mal todos os objetos (25%), 13 mediram alguns corretamente (36%), e 14 mediram bem todos os objetos escolhidos (39%).

Não deveriam estas crianças, neste nível de ensino, terem quase todas esta capacidade desenvolvida? E porque não a têm? Será que na escola, em anos anteriores, os professores não dinamizaram com eles atividades neste âmbito? E, por outro lado, será que o ato de medir não faz parte das suas vivências em família, mesmo que apenas como observador de atividades quotidianas?

Ou tratar-se-á do instrumento utilizado – a fita métrica – que não faz parte das suas experiências? Estarão habituados a utilizar apenas a régua em detrimento de outros instrumentos, os quais também são igualmente úteis, porém adequados a outros tipos de objetos relativamente aos quais não surge a necessidade de os medir?

Provavelmente, na disciplina de Educação Visual e Tecnológica, terá sido apenas necessária a utilização da régua para as atividades constantes do currículo de 5º ano. De qualquer forma, durante o 1º Ciclo parece-me que os professores deverão ter desenvolvido com os alunos atividades diversificadas, quer ao nível dos suportes bem como dos instrumentos necessários, tanto em Expressão Plástica como também em Matemática.

Nas indicações metodológicas presentes no Programa de Matemática relativas ao 1º Ciclo do Ensino Básico, para o Tema Matemático Geometria e Medida é referido que “os alunos devem realizar medições com essas unidades (unidades de medida convencionais do *Sistema Internacional de Unidades* - *SI*) usando instrumentos de medida adequados e relacionando as várias unidades associadas a cada grandeza”, sendo fundamental para a aprendizagem a resolução de problemas em situações do dia a dia pois “é a partir da exploração de situações concretas que surgem as fórmulas e os procedimentos para determinar medidas”. Quanto aos recursos, defende-se que os materiais manipuláveis “permitem estabelecer relações e tirar conclusões, facilitando a compreensão de conceitos”, aconselhando, na abordagem da Geometria e Medida a utilização de “instrumentos como, por exemplo: réguas, esquadros, metros articulados, fitas métricas, balanças, recipientes graduados e relógios” (Programa de Matemática do Ensino Básico, 2007, p. 21).

Para o 2º Ciclo, relativamente à Medida, na sequência do 1º Ciclo, sugere-se que “as experiências de medição (…) devem ser diversificadas e fazer apelo a diversas unidades”, recorrendo “a instrumentos de medida e de desenho — régua, esquadro, transferidor, compasso” e programas de geometria dinâmica (Programa de Matemática do Ensino Básico, 2007, pp. 36 e 37).

Apesar de não constar no Programa referência à utilização da fita métrica no 2º Ciclo, sendo a aptidão para efetuar medições e estimativas em situações diversas uma competência a desenvolver, parece-me bastante útil a introdução de tarefas em que os alunos explorem também este recurso, adequado a medições de materiais presentes na sala de aula, por exemplo, ao trabalhar o conceito de perímetro de polígonos e, como evidenciado na atividade desenvolvida, também os conceitos de perímetro, diâmetro, raio e área do círculo.

A justificação dada (ou a falta dela) na questão final do exercício 2.5. fazem suspeitar que a maioria dos alunos de ambas as turmas não ajuizou acerca da razoabilidade das suas medições e consequentes respostas. Apenas uma aluna registou o seguinte: “Não, porque as minhas medidas não estão bem medidas”.

3.1.3 Particularidades do Desenvolvimento da Atividade

Relativamente à tarefa 1, a circunferência que era indicada na alínea a) suscitou algumas dificuldades de construção por ter de ser traçada com uma abertura de compasso de 0,5cm, o que permitia pouca agilidade no manuseamento do instrumento.

Esta alínea poderia ser retirada da tarefa pois os valores da medida do seu perímetro recorrendo ao cordel revelaram-se pouco rigorosos.

Circunferências com estas medidas de diâmetro, bem como de menores e maiores dimensões poderiam ser construídas utilizando um software matemático, como por exemplo o GeoGebra, para que os alunos pudessem verificar as medidas com rigor e comparar com o seu trabalho na atividade. Poder-se-ia assim refletir e tirar conclusões sobre os processos utilizados e pensar como terão feito os nossos antepassados ao longo dos tempos e sem estes recursos tão avançados e facilitadores aos quais temos acesso nos dias de hoje.

Na realização do exercício 2.1., alguns alunos registaram na coluna “Perímetro : Diâmetro” o valor da razão com unidade (cm). Ao verificá-lo tive de alertar para o facto de uma razão não apresentar unidade de medida pois trata-se de uma comparação entre duas quantidades/medidas. O exercício seguinte (2.2.) com o exemplo prático que apresentei utilizando os cordéis com a medida do perímetro e do diâmetro de uma das circunferências poderá ter auxiliado na compreensão. De qualquer forma, poderiam ser dados outros exemplos.

O exercício relativamente ao qual os alunos parecem ter tido menor afinidade terá sido o 2.3.. Efetivamente, apresentaram os termos das razões, calcularam os valores e deram a sua resposta, porém não me parece que muitos tenham estabelecido autónoma e individualmente a relação de proporcionalidade entre diâmetros e perímetros de duas circunferências dadas. Talvez, se apresentado numa tabela que o sugerisse visualmente, o exercício tivesse sido mais eficaz.

3.1.4 Algumas Conclusões

Assim, pretendia-se que os alunos concluíssem que:

- existe uma relação constante entre o diâmetro e o perímetro do círculo;

- a razão P/D, em qualquer círculo, é sempre o mesmo valor, e que esse valor corresponde a um valor próximo de π;

- os valores por eles calculados são aproximações de π, e que o rigor do valor obtido depende da precisão das medições efetuadas;

- existe uma relação de proporcionalidade entre diâmetros e perímetros de duas dadas circunferências;

- o número π (irracional) é enquadrado entre dois números próximos (racionais).

Considerando a análise relativa ao desempenho dos alunos efetuada anteriormente, poder-se-á aferir que, de um modo geral, os dois primeiros objetivos foram francamente atingidos e que, por sua vez, os três seguintes talvez não tenham sido alcançados por todos. Não obstante, sendo o 5º ano o ano de introdução destes conceitos, parece que estas experiências foram, sem dúvida, fundamentais na abordagem dos conceitos associados, e serão um bom “pano de fundo” para o trabalho a desenvolver no ano letivo seguinte.

Para além disso, tal como foi dito no início da apresentação deste parágrafo, a realização da tarefa permitiu aos alunos aperceberem-se da ligação da matemática com a realidade que os cerca. Mostrar que na medida de simples objetos do dia a dia existem conceitos matemáticos que contêm os seus “segredos” pode despertar curiosidade e constituir um incentivo para o estudo da disciplina.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi desenvolvido com o propósito de usar as potencialidades da história da matemática no ensino dos números, em particular do número pi, pois pensamos que os exemplos históricos, na sua riqueza e diversidade, podem ser úteis tanto a professores como a alunos. Embora as opções tomadas tivessem sempre em mente esse objetivo, não foi possível, no contexto presente, explorar exaustivamente as possibilidades que a história proporciona. Os exemplos utilizados resultaram de uma escolha pessoal, entre os muitos que poderiam ser explorados. Um trabalho deste tipo deixa alguma insatisfação, pois é necessariamente incompleto, mas essa insatisfação é compensada pela vontade de continuar.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Baron, M. E. (1969). *The Origins of the Infinitesimal Calculus*. Pergamon Press.

Bíblia Sagrada (pp. 397 e 398). (Reedição 2005). Lisboa: Sistema J.

Bongiovanni, V. (2005). As duas maiores contribuições de Eudoxo de Cnido «a teoria das proporções e o método de exaustão» (pp. 91-110). UNIÓN-Revista Iberoamericana de Educación Matemática, Número 2.
acedido em http://www.fisem.org/web/union/revistas/2/Union_002_008.pdf

Bouvier, A. (1986). *Didactique des Mathématiques: Le dire et le faire*. Paris: Cedic/Natan.

Boyer, C. (1968). *História da Matemática*. Trad. Gomide, E. F. (2ª Ed 1996). São Paulo: Editora Edgard Blücher.

Calinguer, R. (1999). *A Contextual History of Mathematics: to Euler* (pp. 68-79). Prentice Hall.

Caraça, B. J. (1941). *Conceitos Fundamentais da Matemática* (2ª Ed 1998). Lisboa: Gradiva-Publicações L.da.

Cousquer, E. (1994). *Histoire du Concept de Nombre*. IREM – Université des Sciences et Technologies de Lille.

Cousquer, E. (data??). *De la théorie des proportions à la théorie des nombres réels*. Laboratoire LAMIA
acedido em
http://ddata.over-blog.com/xxxyyy/2/78/40/05/histoire_des_maths/proportions.pdf

Davis, M. (2000). *The Universal Computer: The Road from Leibniz to Turing*. New York: WW Norton.

Dedekind, R. (1888). *O que são e para que servem os números?*. Trad. e Ed. Oliveira, A. (2012)
obtido em https://sites.google.com/site/tutasplace/Home/cursos

Dedekind, R. (1872). *Continuidade e Números Irracionais*. Ed. Oliveira, A. (2009)
obtido em https://sites.google.com/site/tutasplace/Home/cursos

Dedron, P. e Itard, J. (1959). *Mathématiques et Mathématiciens*. Paris: Éditions Magnard.

Delahaye, J. (1997). *Le Fascinant Nombre* π. Paris: Pour La Science.

Dhombres, J. et al (1985). *Le Matin des mathématiciens: entretiens sur l'histoire des mathématiques.* Paris: Editions Belin.

Direção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular. *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Ministério da Educação. Versão homologada a 28 de dezembro de 2007

Direção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular. *Metas Curriculares do Ensino Básico para a disciplina de Matemática*. Ministério da Educação e Ciência. 2012

Edwards Jr., C.H. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. Springer.

Gardner, M. (1996). *New Mathematical Diversions from Scientific American* (pp. 91-102). London: George Allen and Unwin.

Gardner, M. (1977). *O Festival Mágico da Matemática.* Trad. Carvalho, M. C. (1ª Ed 1994). Coleção O Prazer da Matemática. Lisboa: Gradiva.

Gaspar, M.T. e Mauro, S. (2004). *Explorando a Geometria através da História da Matemática e da Etnomatemática*. VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. Universidade Federal de Pernambuco. Sociedade Brasileira de Educação Matemática
acedido em http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/07/MC10721746500.pdf

Jahnke, H. N. (1948). A *History of Analysis – History of Mathematics (volume 24)*. American Mathematical Society (Impresso em 2003)
acedido a partir de http://books.google.pt/

Jesseph, D. M. (2000). *Squaring the Circle: The War Between Hobbes and Wallis.* Chicago: University of Chicago Press
acedido a partir de http://books.google.pt/

Newman, J. R. (1956). *The World of Mathematics – Volume I* (Ed. 1988; pp. 515-527). Washington: Tempus Books of Microsoft Press.

Oliveira, A. J. F. (2009). Prefácio do Editor de *Continuidade e Números Irracionais* de Dedekind, R.
obtido em https://sites.google.com/site/tutasplace/Home/cursos

Oliveira, A. J. F. (2012). Prefácio do Tradutor de *O que são e para que servem os números?* de Dedekind, R.
obtido em https://sites.google.com/site/tutasplace/Home/cursos

Parelman, Y. (1968). *Matemáticas Recreativas*. Trad. Neves, J.M.S. (1979). Lisboa: Litexa-Portugal.

Stevin, S. (1585). *L'Arithmétique*. Leyde: Christophle Plantin
Documento digitalizado obtido a partir de http://books.google.pt/

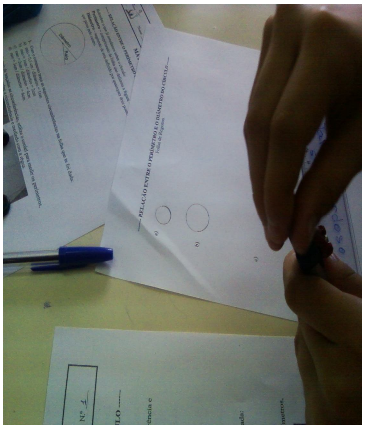
Taylor, P. (1999). Practical Foundations of Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press
acedido em http://www.cs.man.ac.uk/~pt/Practical_Foundations/html/s21.html

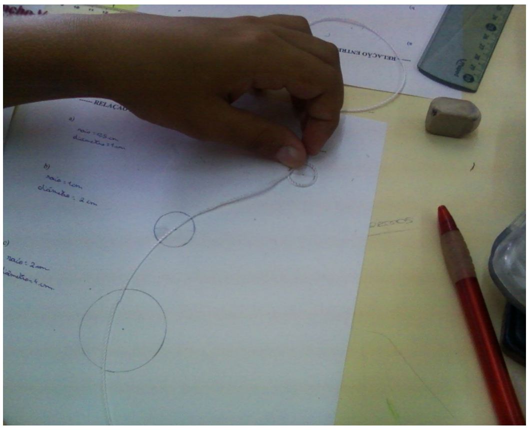
Vasconcellos, F. (1925). *História das Matemáticas na Antiguidade*. Ed. Oliveira, A. (2ª Ed. 2009). Lisboa: Ludus.

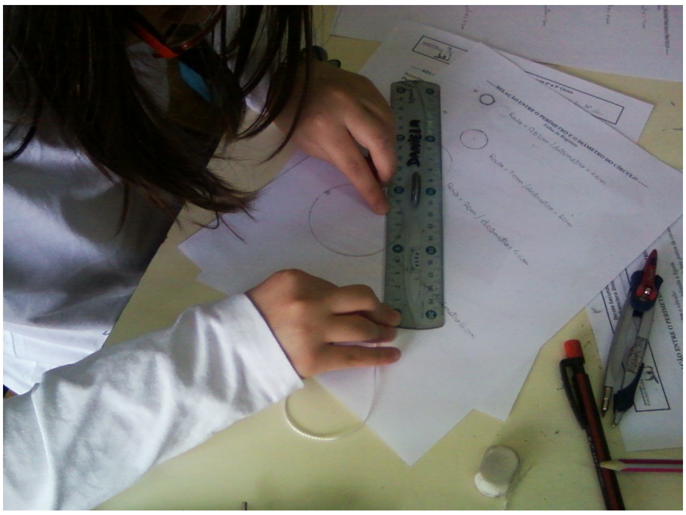
Wells, D. (1996). *Dicionário de Números Interessantes e Curiosos*. Ed. Valente, G. e Trad. Cruz, N. S. (2ª Ed. 2003). Coleção O Prazer da Matemática. Lisboa: Gradiva.

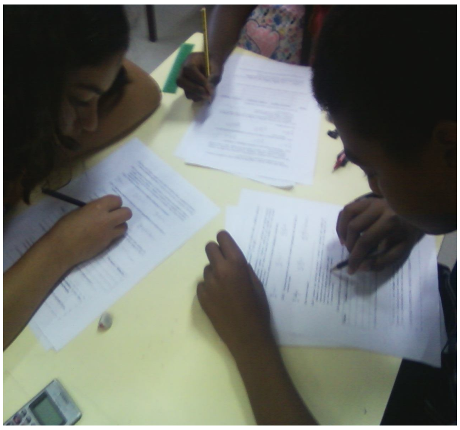
ANEXOS

A - Fotografias do Trabalho com as Turmas









B- Os Cálculos Mais Significativos de π

Antes do século XX

Nome	Data	Decimais	Cálculo
Babilónios	2000 a.C.	1	3,125 (=$3+1/8$)
Egípcios (papiro de Rhind)	2000 a.C.	1	3,16045 (=$[16/9]^2$)
Chineses	1200 a.C.	0	3
Bíblia	550 a.C.		3
Arquimedes	250 a.C.	3	3,14185
Vitruvius	20 a.C.	1	3,125 (= 25/8)
Hon Han Shu	130	1	3,1622 (= √10)
Ptolomeu	150	3	3,14166 (= 377/120)
Chung Hing	250	1	3,1622 (= √10)
Wang Fau	250	1	3,155555 (= 142/45)
Liu Hui	264	5	3,14159
Siddhanta	380	3	3,1416 (3+177/1250)
Tsu Chung Chih	480?	6	3,141592 (= 355/113)
Aryabhata	499	4	3,1416 (= 62832/2000)
Brahmagupta	640	1	3,1622 (= √10)
Al-Khowarizmi	800	4	3,1416
Fibonacci	1220	3	3,141818
Madhava	1400	11	3,14159265359
Al-Kashi	1429	14	3,14159265358979
Otho	1573	6	3,1415929
Viète	1593	9	3,1415926536
Romanus	1593	15	3,141592653589793
Van Ceulen	1596	20	3,14159265358979323846
Van Ceulen	1609	34	3,1415926535897932384626433832795029
Grienberger	1630	39	
Newton	1665	16	3,1415926535897932
Sharp	1699	71	
Seki Kowa	1700	10	
Machin	1706	100	
De Lagny	1719	127	apenas 112 corretas
Takebe	1723	41	
Kamata	1730	25	
Matsunaga	1739	50	
von Vega	1794	140	apenas 136 corretas
Rutherford	1824	208	apenas 152 corretas
Strassnitzky, Dase	1844	200	
Clausen	1847	248	

Lehmann	1853	261	
Rutherford	1853	440	
Shanks	1874	707	apenas 527 corretas

Durante o século XX

Nome	Data	Decimais
Ferguson	1946	620
Ferguson	01-1947	701
Ferguson e Wrench	1948	808
Smith e Wrench	1949	1 120
Reitwiesner et al. (ENIAC)	1949	2 037
Nicholson e Jeenel	1954	3 092
Felton	1957	7 480
Genyus	01-1958	10 000
Felton	05-1958	10 021
Guilloud	1959	16 167
Shanks e Wrench	1961	100 265
Guilloud e Filliatre	1966	250 000
Guilloud e Dichampt	1967	500 000
Guilloud e Bouyer	1973	1 001 250
Miyoshi e Kanada	1981	2 000 036
Guilloud	1982	2 000 050
Tamura	1982	2 097 144
Tamura e Kanada	1982	8 388 576
Kanada, Yoshino e Tamura	1982	16 777 206
Ushiro e Kanada	10-1983	10 013 395
Gosper	1985	17 526 200
Bailey	01-1986	29 360 111
Kanada e Tamura	10-1986	67 108 839
Kanada, Tamura, Kobo et al.	01-1987	134 217 700
Kanada e Tamura	01-1988	201 326 551
Chudnovsky e Chudnovsky	05-1989	480 000 000
Kanada e Tamura	07-1989	536 870 898
Chudnovsky e Chudnovsky	08-1989	1 011 196 691
Kanada e Tamura	11-1989	1 073 741 799
Chudnovsky e Chudnovsky	08-1991	2 260 000 000
Chudnovsky e Chudnovsky	05-1994	4 044 000 000
Kanada	08-1995	4 294 967 286
Kanada	10-1995	6 442 450 938
Kanada e Takahashi	07-1997	51 539 600 000
Kanada e Takahashi	09-1999	206 158 430 000